МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лаборатория "Сверхмедленные процессы"

В.М. Миклюков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения

Волгоград 2007

ББК 22.161.558
М59

Печатается по решению редакционно — издательского совета
Волгоградского государственного университета

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук А.А. Клячин
канд. физ.-мат. наук А.Н. Кондрашов

Миклюков В.М.

Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения [Текст]: [монография]/ В.М. Миклюков ; ВолГУ. – Волгоград: Изд-во ВолГУ. – 2007.– 530 с.

ISBN 5-9669-0209-7

Монография посвящена введению в геометрический анализ. Цель книги — дать как можно более широкое представление о методах современного геометрического анализа, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и всех читателей, интересующихся указанными вопросами.

ББК 22.161.558

ISBN 5-9669-0209-7

Предисловие

Уже первооткрывателями теории квазиконформных отображений – М.А. Лаврентьевым и Г. Гречем – превосходно понимались наитеснейшие связи теории с нелинейными эллиптическими уравнениями в частных производных. Вообще говоря, и сама теория квазиконформных отображений возникла как ответ на вызовы механики жидкости и газа, формулирующей все новые и новые задачи, аппелирующие ко все более экзотичным нелинейным уравнениям и системам (М.А. Лаврентьев [59], М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат [60, глава III], Л. Берс [127, глава II], И.Н. Векуа [21, глава шестая], В.Н. Монахов [90, глава V], Ю.В. Шеретов [116, глава 4] и др.).

В двумерном случае взаимосвязи между квазиконформными отображениями и уравнениями к настоящему времени, в целом, понятны. Вместе с тем, в случае $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, вплоть до сегодняшнего времени имеется определенная лакуна в информации относительно квазиконформных отображений $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и решений квазилинейных уравнений, описывающих компоненты f_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$ вектор-функции f. К примеру, почти ничего не известно о системах дифференциальных уравнений для нескольких компонент $(f_1, f_2, \dots, f_k)$, $1 < k < n$, вектор-функции, осуществляющей квазиконформное отображение. Необходимость в информации, заполняющей данную лакуну, давно ощущается в сообществе специалистов, изучающих квазиконформные отображения. Частичное решение этой проблемы дано в монографиях А.П. Копылова [56, глава 3], Т. Иванца и Г. Мартина [183, глава 16], Ю. Хейнонена [169, глава 5].

Предлагаемая монография посвящена новейшим результатам теории пространственных квазиконформных отображений (и почти квазиконформных отображений в смысле Е.Д. Кэллендера [129]), группирующимся вокруг описанной проблемы. Исследуются свойства дифференциальных форм классов $\mathcal{WT}$, включающих в себя наряду с решениями (субрешениями, почти-решениями) квазилинейных уравнений эллиптического типа отображения с ограниченным искажением. Указываются применения в проблеме описания квазиконформно плоских поверхностей в n-мерных римановых многообразиях, в том числе — для поверхностей произвольной коразмерности $1 \leq \operatorname{codim} \leq n-1$.

Разрабатываемые методы оказываются эффективными в исследованиях широкого класса нелинейных уравнений с частными производными, выходящими далеко за пределы очерченного круга вопросов. Попутно, если это не требует привлечения слишком большого объема дополнительно информации, мы даем приложения некоторых из наших общих результатов к уравнениям типа минимальной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, уравнению максимальных поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$ и уравнениям газовой динамики.

С более детальным описанием содержания книги можно ознакомиться по ее оглавлению.

Геометрический анализ, как некоторое синтетическое направление в анализе и геометрии, являет собой активно развивающийся, но еще окончательно не сформировавшийся раздел современной науки. Цель книги — на примере описанной выше проблематики дать введение в геометрический анализ, дать как можно более широкое представление о его методах, познакомить научную молодежь, начинающую работать в многомерном анализе, с некоторыми интересными и еще слабо изученными задачами из необъятного запаса, которыми располагают теория квазиконформных отображений и нелинейные уравнения с частными производными. Автор надеется, что эта высокая цель отчасти оправдывает многочисленные отступления от стержневой линии изложения. В книге приводится значительное количество задач и упражнений, на которых начинающие исследователи могут попробовать свои силы.

Автор благодарен за поддержку коллегам по Волгоградскому государственному университету, где была выполнена бóльшая часть данных исследований. Автор глубоко признателен А.Ю. Игумнову, В. А. Клячину, Т.Г. Латфуллину и Е.А. Щербакову, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний.

Автор будет весьма рад, если книга окажется полезной читателю.

Владимир Михайлович Миклюков
e-mail: miklyuk@mail.ru
г. Волгоград, январь 2007

Содержание

Глава 1

Граничные множества

Ниже вводятся понятия граничных множеств параболического и гиперболического типов на поверхностях. Изучается функция исчерпания таких множеств. Доказывается параболичность некоторых граничных множеств, расположенных на графиках решений уравнений типа минимальной поверхности. Указаны признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств на графиках пространственноподобных поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}^n_1$, в частности, существенно усиливающие известные теоремы Чоя и Трайбергса [134] – [137] о гиперболичности графиков решений уравнения постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3_1$. При изложении результатов мы следуем [78].

1.1 Граничные множества абстрактной поверхности

1.1.1 Римановы многообразия

Начнем с терминологии. Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие с краем или без края. Наряду с этим мы будем предполагать, что многообразие $\mathcal{M}$ ориентируемо и класса C^p, где $p \geq 2$. Через $T(\mathcal{M})$ мы обозначаем касательное расслоение и через $T_m(\mathcal{M})$ касательное пространство в точке $m \in \mathcal{M}$. Для каждой пары векторов $x, y \in T_m(\mathcal{M})$ символ $\langle x,\, y\rangle$ означает их скалярное произведение. Риманова связность на $T(\mathcal{M})$ порождает естественную связность для тензоров любого типа. Эта связность сохраняет скалярное произведение описанное выше.

Пусть Y – тензорное поле на $\mathcal{M}$, $x \in T_m(\mathcal{M})$. Ковариантная производная поля Y вдоль вектора x обозначается символом $\nabla_x Y$. Тензор $\nabla_x Y$

определяется в точке m и имеет тот же самый тип, что и Y. Поскольку связность сохраняет скалярное произведение, то

$$\nabla_x\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_x Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_x Z\rangle,$$

где Y и Z суть тензорные поля одного типа.

Если $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ – функция, то символ $\nabla_{\mathcal{M}} f$ далее означает градиент f в метрике многообразия $\mathcal{M}$. Символом ∇f мы пользуемся в случае, когда метрика ясна из контекста.

Дивергенцией гладкого векторного поля X на $\mathcal{M}$ называется величина

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle\nabla_{E_i} X,\ E_i\rangle\,,$$

где суммирование производится по произвольному ортонормированному базису пространства $T_m(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – римановы многообразия, где функции расстояния между точками p и q записываются как $d(p,q)$ и $r(p,q)$ соответственно. Пусть $A \geq 0$ – постоянная. Отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *липшицевым* с постоянной A, если

$$r(f(p), f(q)) \leq A\, d(p,q)$$

при всех $p, q \in \mathcal{M}$.

Гомеоморфное отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *билипшицевым* ((A', A'')-квазиизометрическим), если f^{-1} и f липшицевы с постоянными $1/A'$ и A'' соответственно.

Если каждая из точек $a \in \mathcal{M}$ имеет окрестность U такую, что ограничение $f|_U$ липшицево (билипшицево), то отображение f называется *локально липшицевым* (*локально квазиизометрическим*).

Квазиизометричекое отображение с постоянными $A' = A'' = 1$ называется изометрическим.

Пример 1.1.1 Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$. Если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – сохраняющее ориентацию изометрическое отображение, то f есть линейное ортогональное преобразование с определителем, равным 1.

Пример 1.1.2 Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, граница которой содержит не менее двух точек, и пусть $\delta(\cdot) = \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)$ означает расстояние до границы ∂D. Для произвольной пары точек $x, y \in D$ пусть

$$j_D(x,y) = \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\min\{\delta(x), \delta(y)\}}\right)\,.$$

Величина $j_D(x,y)$ удовлетворяет аксиомам расстоянием в области D так, что $(D, j_D(x,y))$ является метричеким пространством. Как показано в [166], всякая изометрия пространства $(D, j_D(x,y))$ является преобразованием Мебиуса, т.е. представима в виде суперпозии конечного числа преобразований подобия и инверсий относительно сфер.

Пусть $D \subset \mathcal{M}$ – открытое множество. Символами $\mathrm{Lip}\,(D)$ и $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\,(D)$ обозначаются классы липшицевых и локально липшицевых функций $f : D \to \mathbb{R}$, соответственно. Функция $f(x) \in \mathrm{Lip}_0(D)$, если она принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(D)$ и имеет компактный носитель

$$\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x \in D : f(x) \neq 0\}} \subset D\,.$$

Символ $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ означает множество всех измеримых по Лебегу функций, определенных на открытом множестве $D \subset \mathcal{M}$ и локально интегрируемых со степенью p, $1 \le p \le \infty$, в D. Символ $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ означает множество функций с обобщенными частными производными в смысле Соболева, принадлежащими классу $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [167], [168, раздел 2.2]).

Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – римановы многообразия класса C^k, $k \ge 1$, и $F : D \subset \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – отображение, то мы говорим, что $F \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$, если для всякой функции $\phi \in C^0(\mathcal{N})$ выполнено $\phi \circ F \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$. Отображение F есть класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, если $\phi \circ F \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ для каждого $\phi \in C^1(\mathcal{N})$.

1.1.2 Абстрактная поверхность

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие с краем или без края. Определим *абстрактную поверхность* Ω над областью $D \subset \mathcal{M}$ посредством задания элемента длин кривых, лежащих на ней, и ее элемента площади.

Пусть $\Gamma(D)$ – множество всевозможных жордановых локально спрямляемых (в метрике $\mathcal{M}$) дуг или кривых γ, лежащих в D. Каждая из замкнутых спрямляемых дуг γ может быть задана в виде

$$m = m(s) : [0, \mathrm{length}\,\gamma] \to D\,,$$

где $0 \le s \le \mathrm{length}\,\gamma \le \infty$ – длина дуги, отсчитываемой от начальной точки $m(0)$ до текущей точки $m(s)$ в указанном вдоль γ направлении. Локально спрямляемые дуги γ могут быть очевидным образом параметризованы посредством длины дуги, отсчитываемой от фиксированной точки в положительном и отрицательном направлениях вдоль γ.

Предположим, что вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ задана некоторая неотрицательная, измеримая по Лебегу, вещественнозначная функция $h_\gamma(m)$. Совокупность всех таких функций для семейства дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ будем обозначать символом $\mathcal{H} = \{h_\gamma\}$.

Будем говорить, что множество функций $\mathcal{H}$ *согласовано* в точке $a \in D$, если для всех кривых $\gamma \in \Gamma(D)$, проходящих через точку a и имеющих в a одну и ту же касательную, значения $h_\gamma(a)$ совпадают.

Предположим, что множество функций $\mathcal{H}$ согласовано почти всюду в области D. Тем самым, для почти всех $m \in D$ и всех направлений $\xi \in T_m(\mathcal{M})$, $|\xi| = 1$, определена неотрицательная функция

$$H(m,\xi) \quad \text{и} \quad H(m,-\xi) = H(m,\xi)\,.$$

Продолжим H по второй переменной на все пространство $T_m(\mathcal{M})$, пользуясь правилом $H(m,\lambda\,\xi) = \lambda\,H(m,\xi)$, $\lambda \geq 0$. В результате такого продолжения, для всякой $\gamma \in \Gamma(D)$ почти всюду вдоль нее выполнено

$$H(m,\overrightarrow{ds}_{\mathcal{M}}) = h_\gamma(m)\,|\overrightarrow{ds}_{\mathcal{M}}|\,.$$

Здесь $\overrightarrow{ds}_{\mathcal{M}}$ – вектор длины $ds_{\mathcal{M}}$ в $T_m(\mathcal{M})$ с началом в точке m.

Зафиксируем произвольно положительную функцию k, определенную почти всюду и измеримую в смысле Лебега в D.

Под абстрактной поверхностью Ω далее будем понимать всякую тройку (D,H,k) описанного вида.

Величину

$$ds_\gamma = h_\gamma(m)\,|\overrightarrow{ds}_{\mathcal{M}}|\,, \tag{1.1.1}$$

будем называть *элементом длины дуги* $\gamma \in \Gamma(D)$ в точке $m \in D$, а величину

$$d\Omega = k(m)\,*\mathbb{1}_{\mathcal{M}} \tag{1.1.2}$$

– *элементом площади* абстрактной поверхности Ω.

Здесь и ниже символом $*\mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ обозначается форма объема на многообразии $\mathcal{M}$. Необходимые сведения о внешних дифференциальных формах см. далее раздел 2.1.

Для произвольной пары точек $m', m'' \in D$ определим *расстояние*

$$r_\Omega(m',m'') = \inf\int\limits_\gamma ds_\gamma\,, \tag{1.1.3}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам $\gamma \in \Gamma(D)$, соединяющим точки m' и m''.

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, k)$. Предположим, что $H(m,\xi)$ – функция, определенная для почти всех $m \in D$ и всех $\xi \in T_m(\mathcal{M})$, подчинена условиям:

a) $c_1|\xi| \le H(m,\xi) \le c_2|\xi|$, $c_1 = c_1(D')$, $c_2 = c_2(D') > 0$, почти всюду в каждой из подобластей $D' \subset\subset D$;

b) почти в каждой точке $m \in D$ множество

$$\Xi(m) = \{\xi \in T_m(\mathcal{M}) : H(m,\xi) < 1\}$$

является выпуклым.

Определим двойственную функцию

$$G(m,\eta) = \sup_{\xi \in \Xi(m)} \langle \xi, \eta \rangle, \tag{1.1.4}$$

где $\langle \xi, \eta \rangle$ есть стандартное скалярное произведение векторов ξ и η в $T_m(\mathcal{M})$. При этом почти всюду в D выполнено

$$G(m,\xi) = \sup_{H(m,\eta)\neq 0} \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{H(m,\eta)} \tag{1.1.5}$$

(см. [101, §15]).

Некоторые примеры абстрактных поверхностей Ω вида (D, H, k) можно найти в [84, глава 1].

Пример 1.1.3 Простейший пример доставляют p-мерные поверхности $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, задаваемые локально билипшицевыми вектор-функциями

$$f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n\,, \quad p < n\,.$$

В данном случае вектор функция f абсолютно непрерывна вдоль любой локально спрямляемой дуги $\gamma \subset D$, описываемой уравнениями

$$x = x(s) : [0, \operatorname{length}\gamma] \to D\,.$$

Здесь имеем

$$h_\gamma(x(s)) = \left|\frac{df(x(s))}{ds}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{df_i(x(s))}{ds}\right|^2\right)^{1/2}\,.$$

Согласно теореме Радемахера – Степанова (см., например, [86, раздел 2.1.2]) вектор – функция $f(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в области D. Нетрудно видеть, что семейство $\mathcal{H}$ согласовано в каждой точке дифференцируемочти $f(x)$, причем

$$H(x,\xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\right)^{1/2}$$

с измеримыми по Лебегу, определенными почти всюду в D, вещественнозначными коэффициентами

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle, \quad i,j = 1,2,\ldots,p.$$

Положим

$$g(x) = \det\left(g_{ij}(x)\right), \quad k(x) = \sqrt{g(x)}\,, \quad d\Omega = \sqrt{g(x)}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p\,,$$

$$g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}, \quad i,j = 1,\ldots,p\,,$$

и

$$G(x,\xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{p} g^{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\,.\right)^{1/2}.$$

Тем самым, получаем абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, \sqrt{g})$.

$\square$

Другие примеры мы будем приводить по мере необходимости.

1.1.3 Модуль и емкость

Опишем важное для дальнейшего понятие *модуля семейства дуг* на абстрактной поверхности. Пусть $\Omega = (D, H, k)$ – абстрактная поверхность, заданная над областью $D \subset \mathcal{M}$ и $p \geq 1$.

Будем говорить, что неотрицательная, локально ограниченная, измеримая по Лебегу функция $\rho \geq 0$ *допустима* для подсемейства Γ дуг $\gamma \in \Gamma(D)$, если ρ измерима вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma$ и

$$\int\limits_{\gamma} \rho(m)\,ds_\gamma \geq 1 \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma\,. \tag{1.1.6}$$

Величина

$$\mathrm{mod}_{\Omega,p}\,(\Gamma) = \inf_{\rho} \int\limits_{D} \rho^p\, k(m) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,, \tag{1.1.7}$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям ρ, называется *p-модулем семейства* Γ в метрике поверхности Ω.

Иногда вместо модуля семейства дуг используют величину

$$\lambda_{\Omega,p}(\Gamma) = \frac{1}{\mathrm{mod}_{\Omega,p}\,(\Gamma)}\,,$$

называемую *экстремальной длиной* семейства Γ (см. Альфорс [1, ID]).

В случае, когда метрика $ds_\gamma = |dx|$ евклидова и элемент площади $d\Omega = dx_1 \ldots dx_n$, используется упрощенное обозначение $\mathrm{mod}_p\,(\Gamma)$.

Пусть $P, Q \subset D$ – непустые, замкнутые относительно области $D \subset \mathcal{M}$, непересекающиеся подмножества. Произвольную тройку $(P, Q; D)$ будем называть *конденсатором.*

Определим *модуль и емкость конденсатора* $(P, Q; D)$.

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, k)$. Пусть $G(m, \eta)$ – двойственная к $H(m, \xi)$ функция, определяемая равенством (1.1.4).

p-Модулем конденсатора $(P, Q; D)$ на поверхности $\Omega = (D, H, k)$ называется p-модуль семейства $\Gamma(P, Q; D) \subset \Gamma(D)$ дуг γ, лежащих в D и соединяющих множества P и Q. Именно, мы полагаем

$$\mathrm{mod}_{\Omega,p}(P, Q; D) = \mathrm{mod}_{\Omega,p}\Gamma(P, Q; D)\,. \tag{1.1.8}$$

p-Емкостью конденсатора $(P, Q; D)$ на поверхности $\Omega = (D, H, k)$ будем называть величину

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}\,(P, Q; D) = \inf \int\limits_{D} k(m)\, G^p(m, \nabla\varphi) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,, \tag{1.1.9}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным локально липшицевым в D функциям φ, $\varphi|_P = 0$, $\varphi|_Q = 1$.

Понятие модуля семейства кривых, введенное Альфорсом и Бьерлингом в [119], играет ключевую роль в исследованиях по геометрической теории функций и отображений с ограниченным искажением (см. [156], [240], [109], [170], [229], [243]).

Модульная техника имеет многочисленные применения при изучении поверхностей заданной средней кривизны в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах [71], [78], [46], [84]. Емкость конденсатора широко используется В.Г. Мазьей [65] при изучении $W^{1,p}$-классов в областях $\mathbb{R}^n$.

Вообще же, модуль и емкость конденсатора суть двойственные величины и выбор между ними в исследованиях диктуется, как правило, соображениями удобства.

Теорема 1.1.1 *Пусть* $\Omega = (D, H, k)$ *– абстрактная поверхность. Если* $\Delta \subset D$ *– подобласть, то*

$$\operatorname{cap}_{\Omega,p}(P,\ Q;\ \Delta) = \operatorname{mod}_{\Omega,p}(P,\ Q;\ \Delta) \tag{1.1.10}$$

Доказательство, приводимое в [84, теорема 1.8.1] для $n = 2$, практически без изменений проходит для $n > 2$. □

Пример 1.1.4 Пусть D – область на многообразии $\mathcal{M}$. Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (\mathcal{M}, H, k)$. Пусть $A,\ B \subset D$ таковы, что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ компактны относительно D и $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Рассмотрим конденсатор $(A, B; D)$.

Выберем $H(m, \xi) = |\xi|$. Тогда согласно (1.1.4) имеем $G(m, \eta) = |\eta|$.

Фиксируем $p \geq 1$. Наиболее часто ниже мы будем использовать *p-емкость* конденсатора $(A, B; D)$, определяемую как величину

$$\operatorname{cap}_{\Omega,p}(A, B; D) = \inf \int\limits_D k(m)\, |\nabla\varphi|^p \, * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \tag{1.1.11}$$

где точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым в D функциям φ таким, что $\varphi(m)|_A = 0$, $\varphi(m)|_B = 1$.

В случае $k \equiv 1$, используем стандартное обозначение

$$\operatorname{cap}_{\Omega,p}(A, B; D) \equiv \operatorname{cap}_p(A, B; D)\,.$$

Легко видеть, что для произвольной пары конденсаторов $(A, B; D)$ и $(A_1, B_1; D)$ со свойствами $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ выполнено

$$\operatorname{cap}_p(A_1, B_1; D) \leq \operatorname{cap}_p(A, B; D).$$

Стандартными приемами устанавливается, что емкость $\operatorname{cap}_p(A, B; D)$ не меняется, если в вариационной задаче (1.1.11) ограничиться функциями $\varphi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [42]). □

1.1.4 Граничные множества

Пусть $\mathcal{M}$ – некомпактное многообразие. Определим граничные множества $\mathcal{M}$, исходя из аналогий с теорией простых концов Каратеодори (см., например, [107, §3], [40, глава 2]).

Пусть $\{\mathcal{U}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ – семейство открытых подмножеств $\mathcal{U}_k \subset \mathcal{M}$ со свойствами:

(i) для всех $k = 1, 2, \ldots \quad \overline{\mathcal{U}}_{k+1} \setminus \partial\mathcal{M} \subset \mathcal{U}_k$,

(ii) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{U}}_k = \emptyset$.

Произвольную последовательность $\{\mathcal{U}_k\}$ с указанными свойствами будем называть *цепью* на многообразии $\mathcal{M}$.

Определение 1.1.1 *Пусть $\{\mathcal{U}'_k\}$, $\{\mathcal{U}''_k\}$ – две цепи открытых подмножеств $\mathcal{M}$. Говорят, что цепь $\mathcal{U}'_k$ содержится в цепи $\{\mathcal{U}''_k\}$, если для каждого $m \geq 1$ найдется номер $k(m)$ такой, что при всех $k > k(m)$ выполнено $\mathcal{U}'_k \subset \mathcal{U}''_m$. Две цепи, каждая из которых содержится в другой, называются эквивалентными. Классы эквивалентности ξ цепей называются граничными множествами многообразия $\mathcal{M}$.*

Чтобы определить ξ достаточно задать хотя бы один представитель в классе эквивалентности. Если граничное множество ξ определяется цепью $\{\mathcal{U}_k\}$, то мы пишем $\xi \asymp \{\mathcal{U}_k\}$.

Пусть $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ – последовательность точек $x_N \in D$, не имеющая точек накопления в $\mathcal{M}$. Такие последовательности далее будем называть *расходящимися* в $\mathcal{M}$.

Расходящаяся в $\mathcal{M}$ последовательность точек $x_k \in \mathcal{M}$ *сходится к* ξ, если для некоторой (и, следовательно, произвольной) цепи $\{\mathcal{U}_k\} \in \xi$ выполнено условие: для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдется целое $n(k)$ такое, что $x_n \in \mathcal{U}_k$ при любом $n > n(k)$. Расходящаяся в $\mathcal{M}$ последовательность $\{x_n\}$ *лежит вне* граничного множества $\xi \asymp \{\mathcal{U}_k\}$, если для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдется номер $n(k)$ такой, что при всех $n > n(k)$ точки $x_n \notin \mathcal{U}_k$.

Определение 1.1.2 *Граничное множество $\xi \asymp \{\mathcal{U}_k\}$ называется концом многообразия $\mathcal{M}$, если каждое из открытых множеств $\{\mathcal{U}_k\}$ является связным и имеет компактную границу $\partial\mathcal{U}_k$. Граничное множе-*

ство $\xi \asymp \{\mathcal{U}_k\}$ *называется множеством концов многообразия* $\mathcal{M}$, *если каждое из* $\{\mathcal{U}_k\}$ *имеет компактную границу* $\partial\mathcal{U}_k$.

1.1.5 Емкость и мера Хаусдорфа

Будем говорить, что компактное подмножество $E \subset \mathcal{M}$ имеет p-емкость нуль (в метрике многообразия $\mathcal{M}$), если $\mathrm{cap}_p(E, U; \mathcal{M}) = 0$ для каждого открытого множества U такого, что $U \cap E = \emptyset$. Замкнутое подмножество $E \subset \mathcal{M}$ имеет p-емкость нуль, если каждое из компактных множеств $E_1 \subset E$ имеет p-емкость нуль.

Напомним понятие меры Хаусдорфа. Пусть $h(r)$, $0 \le r < \infty$, – неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0) = 0$.

Пусть A – подмножество $\mathcal{M}$. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть $B_1, \ldots, B_k, \ldots$ – последовательность открытых геодезических шаров в $\mathcal{M}$ такая, что $A \subset \cup_k B_k$ и их радиусы не превышают ε. Рассмотрим величину

$$\mathcal{H}^h(A, \varepsilon) = \inf \sum_k h(r_k),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным последовательностям $\{B_k\}$ с указанными свойствами.

Величина $\mathcal{H}^h(A, \varepsilon)$ является невозрастающей функцией переменной ε. Предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mathcal{H}^h(A, \varepsilon) = \mathcal{H}^h(A)$$

называется *h-мерой Хаусдорфа* множества A. Если $h(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, то $\mathcal{H}^h(A)$ называется *α-мерой* и обозначается символом $\mathcal{H}^\alpha(A)$.

Лемма 1.1.1 *Если множество* $E \subset \mathcal{M}$ *имеет* h*-емкость нуль, то для произвольной неубывающей функции* $h(r)$, $0 \le r < \infty$, $h(0) = 0$, *выполнено*

$$\int_0 \frac{[h(r)]^{1/p}}{r^{n/p}} dr < \infty. \tag{1.1.12}$$

Пусть $h(r) = r^{n-p}$ *при* $1 < p < n$ *и* $h(r) = (\ln \frac{1}{r})^{1-p}$ *при* $0 \le r \le \frac{1}{2}$, $p = n$. *Если* $\mathcal{H}^h(E) = 0$, *то* $E \subset \mathcal{M}$ *имеет* p*-емкость нуль.*

Доказательство см., например, в [32, разделе 5.3] для $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Поскольку утверждение имеет локальный характер, легко видеть, что оно справедливо и для римановых многообразий. □

Отметим еще следующее утверждение.

Лемма 1.1.2 *Если замкнутое подмножество E многообразия $\mathcal{M}$ размерности $\dim \mathcal{M} = n$ имеет 1-емкость нуль, то*

$$\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0\,.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \subset D$ так, чтобы $\mathrm{cap}_1(E, U; D) = 0$. Выберем липшицеву функцию $\varphi : D \to [0, 1]$ так, что $\varphi|_E = 0$, $\varphi|_U = 1$, $\nabla\varphi \neq 0$ почти всюду на $D \setminus (E \cup U)$ и

$$\int\limits_D |\nabla\varphi| * \mathbb{1} \leq \varepsilon.$$

В соответствии с формулой для ко-площади мы имеем

$$\int\limits_D |\nabla\varphi| * \mathbb{1} = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{G_t} d\mathcal{H}^{n-1} = \int\limits_0^1 \mathcal{H}^{n-1}(G_t)\,,$$

где $G_t = \{m \in \mathcal{M} : \varphi(m) = t\}$ есть множество уровня функции φ [150, раздел 3.2].

Отсюда получаем

$$\inf_t \mathcal{H}^{n-1}(G_t) \leq \varepsilon$$

и найдется G_t произвольно малой $(n-1)$-мерной меры.

Так как множество U открыто, то это возможно только для множества E нулевой $(n-1)$-мерной меры. □

Упражнение. *Доказать обратное утверждение: если $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$, то* $\mathrm{cap}_1(E) = 0$.

1.1.6 Понятие типа граничного множества

Пусть D – область на многообразии $\mathcal{M}$ и $\Omega = (D, H, k)$ – некоторая абстрактная поверхность. Пусть $\{\mathcal{U}_n\}$ – произвольная цепь в D. Фиксируем подобласть $H \subset\subset D$. Если n достаточно велико, то пересечение

$\overline{H} \cap \overline{\mathcal{U}}_n = \emptyset$ и мы вправе рассматривать конденсатор $(\overline{H}, \overline{\mathcal{U}_n}; D)$. Ясно, что при таких $n = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{\mathcal{U}_n}; D) \geq \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{\mathcal{U}_{n+1}}; D).$$

Будем говорить, что цепь $\{\mathcal{U}_m\}$ в D имеет *p-емкость нуль* (p-параболический тип), если для каждой подобласти $D' \subset\subset D$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{D}', \overline{\mathcal{U}_n}; D) = 0. \tag{1.1.13}$$

Будем говорить, что граничное множество ξ имеет *p-параболический тип* в метрике поверхности Ω, если каждая из цепей $\{\mathcal{U}_n\} \in \xi$ имеет p-емкость нуль в метрике Ω. Граничное множество ξ имеет *p-гиперболический тип*, если, как минимум, одна из цепей $\{\mathcal{U}_n\} \in \xi$ не имеет p-параболического типа.

Пусть

$$\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \overline{\mathcal{U}}_n \setminus \partial D \subset \mathcal{U}_{n+1}, \quad \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n = D$$

– произвольное исчерпание D подобластями $\{\mathcal{U}_n\}$. Поверхность $\Omega = (D, H, k)$ имеет либо p-параболический, либо p-гиперболический тип в зависимости от p-параболичности, либо p-гиперболичности граничного множества $\{D \setminus \overline{\mathcal{U}}_n\}$.

Известно [41], что в случае, когда $H(m, \xi) = |\xi|_{\mathcal{M}}$ и $k \equiv 1$ *некомпактное риманово многообразие $\mathcal{M}$ без края имеет p-параболический тип тогда и только тогда, когда каждое ограниченное сверху C^2-решение неравенства*

$$\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0$$

является тождественно постоянным.

При $p = 2$ понятия 2-параболичности и 2-гиперболичности многообразия совпадают с традиционными [91, разделы 8.17, 8.19]. Таким образом, говоря о параболичности или гиперболичности типа (многообразия или граничного множества), мы говорим о 2-параболичности или 2-гиперболичности типа.

Пример 1.1.5 Пространство $\mathbb{R}^n$ имеет p-параболический тип при $p \geq n$ и p-гиперболический тип при $p < n$. См. также пример 1.1.8.

□

Следующее утверждение доставляет удобный прием для проверки p-параболичности и p-гиперболичности граничного множества.

Лемма 1.1.3 *Пусть ξ – граничное множество на поверхности $\Omega = (D, H, k)$, $D \subset \mathcal{M}$, где весовая функция $k(m) : D \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} k(m) \le \operatorname*{ess\,sup}_{D'} k(m) < \infty \tag{1.1.14}$$

для любой подобласти $D' \subset\subset D$.

Если для цепи $\{\mathcal{U}_n\} \in \xi$ и открытого множества $H_0 \subset\subset \mathcal{M}$ выполнено предположение (1.1.13), *то граничное множество ξ имеет p-параболический тип в метрике поверхности Ω.*

Доказательство. Мы будем следовать [78, лемма 2.1]. Очень легко показать, что для параболичности граничного множества ξ достаточно проверить равенство нулю p-емкости хотя бы одной цепи из ξ. Предположим, что цепь $\{U'_n\}_{n=1}^{\infty}$ входит в цепь $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Зададим произвольно подобласть $H \subset\subset D$. Так как для любого m и достаточно больших n выполнено $U'_n \subset U_m$, то множество функций $\varphi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, допустимых в вариационной задаче (1.1.11) для конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_m; D)$, содержится в множестве функций, допустимых при вычислении емкости конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}'_n; D)$. Отсюда получаем

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}'_n; D) \le \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_m; D)\,.$$

Если теперь цепь $\{U_n\}$ обладает свойством (1.1.13), то им обладает и цепь $\{U'_n\}$.

Для доказательства утверждения достаточно установить теперь, что свойство (1.1.13) выполнено для произвольной подобласти $H \subset\subset D$.

Если $H \subset\subset H_0$, то

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; \mathcal{M}) \le \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}_0, \overline{U}_m; \mathcal{M})\,.$$

Выполнение (1.1.13) в этом случае очевидно.

Пусть теперь область $H \subset\subset \mathcal{M}$ произвольна. Зададим область $W \subset\subset H$, где H – открытое множество, удовлетворяющее условиям леммы. В силу сказанного выше достаточно проверить, что *выполнение* (1.1.13) *для конденсаторов $(\overline{W}, \overline{U}_n; D)$ влечет аналогичное свойство для конденсаторов $(\overline{H}, \overline{U}_n; D)$.*

Зафиксируем непрерывную функцию $\eta \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, обращающуюся в 1 на H и имеющую компактный носитель $\operatorname{supp} \eta \subset \mathcal{M}$. Выберем произвольно непрерывную функцию $\varphi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, допустимую при вычислении p-емкости конденсатора $(\overline{W}, \overline{U}_n; D)$, где номер n выбран так, чтобы

$$\overline{U}_n \cap \operatorname{supp} \eta = \emptyset\,.$$

Функция

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \eta - \varphi\,\eta = \varphi\,(1-\eta) + \eta$$

принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, обращается в 1 на H и равна 0 на U_n. Таким образом,

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; D) \leq \int\limits_D k(m)\,|\nabla\tilde{\varphi}|^p\, * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Далее заметим, что

$$\nabla\tilde{\varphi} = (1-\varphi)\,\nabla\eta + (1-\eta)\,\nabla\varphi\,,$$

и потому

$$|\nabla\tilde{\varphi}|^2 = (1-\varphi)^2\,|\nabla\eta|^2 + 2(1-\varphi)(1-\eta)\langle\nabla\eta, \nabla\varphi\rangle + (1-\eta)^2|\nabla\varphi|^2\,.$$

Так как

$$|\langle\nabla\eta, \nabla\varphi\rangle| \leq |\nabla\eta|\,|\nabla\varphi|\,,$$

то в силу неравенства Коши будем иметь

$$|\nabla\tilde{\varphi}|^2 \leq 2(1-\varphi)^2\,|\nabla\eta|^2 + 2(1-\eta)^2\,|\nabla\varphi|^2\,.$$

Откуда, пользуясь неравенством

$$(a^2+b^2)^{1/2} \leq c_1\,(|a|^p + |b|^p)^{1/p}\,, \quad c_1 \equiv \mathrm{const}\,,$$

(см. [12, стр. 29, 32]), находим

$$|\nabla\tilde{\varphi}|^p \leq c_2\,(|1-\varphi|^p\,|\nabla\eta|^p + |1-\eta|^p\,|\nabla\varphi|^p)\,.$$

Таким образом, мы получаем

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; D) \leq c_2 \int\limits_D k(m)\,|1-\varphi|^p\,|\nabla\eta|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} +$$

$$+ c_2 \int\limits_D k(m)\,|1-\eta|^p\,|\nabla\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$$

и, полагая

$$c_3 = c_2 \sup_D |\nabla \eta|^p\,, \quad c_4 = c_2 \sup_D |1-\eta|^p\,,$$

приходим к неравенству

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; D) \le c_3 \int\limits_{\operatorname{supp}\eta} k(m)\,|1-\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} + \tag{1.1.15}$$

$$+ c_4 \int\limits_{\mathcal{M}} k(m)\,|\nabla\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Функция $1-\varphi$ обращается в 0 на подобласти W, а весовая функция $k(m)$ подчинена ограничениям (1.1.14). Поэтому существует постоянная c_5, зависящая только от W и носителя $\operatorname{supp}\eta$, для которой

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\eta} k(m)\,|1-\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \le c_5 \int\limits_{\operatorname{supp}\eta} k(m)\,|\nabla\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,. \tag{1.1.16}$$

Для областей в $\mathbb{R}^n$ это неравенство есть специальный случай хорошо известного неравенства Пуанкаре – Соболева [105, стр. 48]. При этом утверждение остается верным, если предполагать лишь, что

$$M = \sup_W |1-\varphi| < \infty\,.$$

В таком случае постоянная c_5 зависит также от M.

Чтобы убедиться в справедливости (1.1.16) на многообразии покроем $\operatorname{supp}\eta$ конечной системой геодезических шаров достаточно малых радиусов так, чтобы каждый из шаров был диффеоморфен единичному шару в $\mathbb{R}^n$ и воспользуемся указанным неравенством Пуанкаре – Соболева. Детали рассуждений мы оставляем читателю в качестве упражнения, вместе с тем обращая внимание читателя на то, что относительно вида постоянной c_5, кажется, здесь ничего не известно.

Объединяя неравенства (1.1.15), (1.1.16), будем иметь

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; D) \le c_6 \int\limits_{\mathcal{M}} k(m)\,|\nabla\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,,$$

и потому

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{H}, \overline{U}_n; D) \le c_6\, \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{W}, \overline{U}_n; D)\,.$$

Таким образом, выполнение соотношения (1.1.13) для последовательности конденсаторов $(\overline{W}, \overline{U}_n; D)$ влечет выполнение этого соотношения для последовательности конденсаторов $(\overline{H}, \overline{U}_n; D)$, и лемма доказана. $\Box$

1.1.7 Квазиконформные отображения

Напомним известные понятия [99, глава I, §4], [170, раздел 14.1]. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – римановы многообразия размерности n. Отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ класса $W^{1,n}_{\rm loc}(\mathcal{M})$ называется *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*)[1], если f удовлетворяет соотношению

$$|f'(m)|^n \le K J_f(m) \tag{1.1.17}$$

почти всюду на $\mathcal{M}$. Здесь $f'(m): T_m(\mathcal{M}) \to T_{f(m)}(\mathcal{N})$ есть формальная производная (матрица частных производных $f(m)$); далее,

$$|f'(m)| = \max_{|h|=1} |f'(m)h|\,.$$

Через $J_f(m)$ мы обозначаем якобиан f в точке $m\in\mathcal{M}$, т.е. определитель матрицы $f'(m)$.

Наименьшая из постоянных $K\ge 1$ в неравенстве (1.1.17) называется *внешней* дилатацией f и обозначается символом $K_O(f)$. Если отображение f квазирегулярно, то наименьшая из постоянных $K\ge 1$, для которых почти всюду на $\mathcal{M}$ выполняется

$$J_f(m) \le K\, l(f'(m))^n\,, \tag{1.1.18}$$

называется *внутренней* дилатацией $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ и обозначается через $K_I(f)$. Здесь

$$l(f'(m)) = \min_{|h|=1} |f'(m)h|.$$

Величина

$$K(f) = \max\{K_O(f), K_I(f)\}$$

называется *максимальной* дилатацией f, и если $K(f)\le K$, то отображение f называется K-*квазирегулярным*.

---

[1]Первый из терминов чаще используется в русскоязычной литературе, второй – в англоязычной. Мы использем тот либо иной термин руководствуясь исключительно соображениями удобства.

Нетрудно видеть, что $K_O(f) \leq K_I^{n-1}(f)$ и $K_I(f) \leq K_O^{n-1}(f)$. В частности, при $n = 2$ имеем $K_I(f) = K_O(f) = K(f)$.

Упражнение. *Пусть $f_1 : D \to D'$ – K_1-квазирегулярное и $f_2 : D' \to D''$ – K_2-квазирегулярное отображения. Доказать, что отображение $f_2 \circ f_1 : D \to D''$ является $K_1\, K_2$-квазирегулярным (см., например,* [99, теорема 11.1]).

В случае $n = 2$ и $K = 1$ в (1.1.17) класс отображений с ограниченным искажением совпадает с классом голоморфных функций. В случае $n \geq 3$ и $K = 1$ множество всех, отличных от тождественных постоянных, отображений с ограниченным искажением исчерпывается преобразованиями Мебиуса [100, глава II].

Отметим следующее полезное для применений высказывание [99, раздел 5.3], [170, теорема 14.28].

Теорема 1.1.2 *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением. Если $u \in W^{1,n}_{\rm loc}(D')$ и $D' \subset f(D)$ – область, то функция $v = u \circ f$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}(D'')$, $D'' = f^{-1}(D')$. При этом, почти всюду в D'' выполнено*

$$\nabla v(x) = f'(x)^* \, \nabla u(f(x))\,,$$

где A^* означает матрицу, сопряженную матрице A.

Замечание 1.1.1 *Подчеркнем, что в определении отображения с ограниченным искажением непрерывность вектор – функции $f \in W^{1,n}_{\rm loc}(\mathcal{M})$ априори можно не требовать. Данное свойство есть следствие дифференциального неравенства* (1.1.17) (см. [99, теорема 1.1]).

Если гомеоморфизм $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ является отображением с ограниченным искажением, то f называется *квазиконформным.* В этом случае обратное отображение f^{-1} также квазиконформно в области $f(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$, причем $K(f^{-1}) = K(f)$.

Важные примеры отображений с ограниченным искажением $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ доставляют отображения, искажающие длины дуг в конечное (ограниченное) число раз. Следуя [170, **14.78**], будем говорить, что отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $F \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathcal{M})$, есть L–BLD отображение, если $J_f(m) \geq 0$ почти всюду на $\mathcal{M}$ и для некоторой постоянной $L \geq 1$, всех $h \in T_m(\mathcal{M})$ и почти всех $m \in \mathcal{M}$ выполнено

$$|h|/L \leq |f'(m)h| \leq L\,|h|. \tag{1.1.19}$$

Упражнение. *Показать, что каждое f–BLD отображение является квазиизометрическим и K-квазиконформным с $K = L^{2(n-1)}$ ([170], лемма 14.80).*

Пусть $\xi \asymp \{\mathcal{U}_m\}$ – граничное множество многообразия $\mathcal{M}$ и пусть f – гомеоморфное отображение $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$. Символ $f(\xi)$ означает граничное множество на $\mathcal{N}$, генерируемое цепью $f(\mathcal{U}_m)$ открытых множеств.

Отметим следующее утверждение [78, предложение 2.3].

Предложение 1.1.1 *Пусть ξ_1 и ξ_2 – граничные множества n-мерных многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, и пусть $\xi_2 = f(\xi_1)$. Тогда*

(i) если f является квазиизометрическим отображением $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$, то для всякого $p \geq 1$ граничные множества ξ_1 и ξ_2 либо одновременно p-параболические, либо одновременно p-гиперболические,

(ii) если f есть квазиконформное отображение $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$, то ξ_1 и ξ_2 являются одновременно n-параболическими или n-гиперболическими.

Доказательство. Для доказательства (i) достаточно заметить, что квазиизометрия f индуцирует взаимно однозначное соответствие между классами локально липшицевых функций в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, при котором каждой функции $\varphi \in \mathrm{Lip}\,(\mathcal{M})$ отвечает такая функция $\psi \in \mathrm{Lip}\,(\mathcal{N})$, что $\varphi = \psi \circ f$. Непосредственно проверяется, что (1.1.19) выполнено тогда и только тогда, когда элементы длин $ds_{\mathcal{M}}$ и $ds_{\mathcal{N}}$ многообразий связаны соотношениями

$$L_1^{-1}\, ds_{\mathcal{M}} \leq ds_{\mathcal{N}} \leq L_1\, ds_{\mathcal{M}}\,.$$

Тем самым, имеем

$$L_1^{-(n+p)} \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}}\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \leq \int\limits_{\mathcal{N}} |\nabla_{\mathcal{N}}\psi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{N}} \leq L_1^{n+p} \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}}\varphi|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Отсюда для произвольной пары конденсаторов $(P_1, Q_1; \mathcal{M})$ и $(P_2, Q_2; \mathcal{N})$, где $P_2 = f(P_1)$ и $Q_2 = f(Q_1)$, выполнено

$$L_1^{-(n+p)}\mathrm{cap}_p(P_1, Q_1; \mathcal{M}) \leq \mathrm{cap}_p(P_2, Q_2; \mathcal{N}) \leq L_1^{n+p}\mathrm{cap}_p(P_1, Q_1; \mathcal{M})\,.$$

Таким образом, граничные множества ξ_1 и ξ_2 одновременно p-параболичны или p-гиперболичны.

В случае (ii) в силу (1.1.17) и (1.1.18) почти всюду на $\mathcal{M}$ имеем

$$\max_{ds_{\mathcal{M}}=1} ds_{\mathcal{N}} \le K(f) \min_{ds_{\mathcal{M}}=1} ds_{\mathcal{N}}\,,$$

а потому

$$|\nabla_{\mathcal{M}}\varphi|^2 \le |\nabla_{\mathcal{N}}\varphi\circ f|^2 \max_{ds_{\mathcal{M}}=1} ds^2_{\mathcal{N}}\,.$$

Таким образом, в силу квазиконформности отображения f выполнено

$$|\nabla_{\mathcal{M}}\varphi(m)|^n \le K^n(f)\,|J_f(m)|\,|\nabla_{\mathcal{N}}\psi\circ f(m)|^n\,,$$

где $J_f(m)$ – якобиан f в точке $m\in\mathcal{M}$.

Отсюда получаем

$$K^{-n}(f)\int\limits_{\mathcal{M}}|\nabla_{\mathcal{M}}\varphi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \le \int\limits_{\mathcal{N}}|\nabla_{\mathcal{N}}\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{N}} \le K^n(f)\int\limits_{\mathcal{M}}|\nabla_{\mathcal{M}}\varphi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Таким образом,

$$K^{-n}(f)\,\mathrm{cap}_n\,(P_1,Q_1;\mathcal{M}) \le \mathrm{cap}_n\,(P_2,Q_2;\mathcal{N}) \le K^n(f)\,\mathrm{cap}_n\,(P_1,Q_1;\mathcal{M})\,.$$

Из данного соотношения вытекает, что граничные множества ξ_1 и ξ_2 одновременно n-параболичны или n-гиперболичны. $\square$

1.1.8 Функция исчерпания граничного множества

Пусть $h(m):\mathcal{M}\to(0,h_0)$ – локально липшицева функция. Для произвольного $t\in(0,h_0)$ мы обозначаем символами

$$\begin{aligned} B_h(t) &= \{m\in\mathcal{M} : h(m)<t\}\,,\\ \Sigma_h(t) &= \{m\in\mathcal{M} : h(m)=t\} \end{aligned}$$

h-шар и h-сферу соответственно.

Будем говорить, что функция $h(m)$ есть *функция исчерпания граничного множества* ξ многообразия $\mathcal{M}$, если для произвольной последовательности точек $m_k\in\mathcal{M}$, $k=1,2,\ldots$, функция $h(m_k)\to h_0$ тогда и только тогда, когда $m_k\to\xi$.

Легко видеть, что данное условие имеет место тогда и только тогда, когда для произвольной неубывающей последовательности

$$t_1 < t_2 < \ldots < h_0\,, \quad t_k \to h_0\,,$$

соответствующая последовательность открытых множеств $V_k = \{m \in \mathcal{M} : h(m) > t_k\}$ есть цепь, определяющая граничное множество ξ. Таким образом, функция $h(m)$ исчерпывает множество ξ в традиционном смысле слова.

Функция $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$ называется *функцией исчерпания многообразия* $\mathcal{M}$, если выполняются следующие два условия:

(i) при всех $t \in (0, h_0)$ множества $\overline{B_h(t)}$ компактны;

(ii) для всякой последовательности $t_1 < t_2 < \ldots < h_0$ со свойством $\lim_{k\to\infty} t_k = h_0$ последовательность h-шаров $\{B_h(t_k)\}$ образует исчерпание $\mathcal{M}$, т.е.

$$B_h(t_1) \subset B_h(t_2) \subset \ldots \subset B_h(t_k) \subset \ldots \quad \text{и} \quad \cup_k B_h(t_k) = \mathcal{M}.$$

Пример 1.1.6 Пусть $\mathcal{M}$ – риманово многообразие. Положим

$$h(m) = \operatorname{dist}(m, m_0)\,,$$

где $m_0 \in \mathcal{M}$ есть фиксированная точка. Так как $|\nabla h(m)| = 1$ почти всюду на $\mathcal{M}$ (см., например, леммы 1 и 2 в [45]), то функция

$$h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)\,, \quad h_0 = \sup_{m\in\mathcal{M}} \operatorname{dist}(m, m_0)\,,$$

является функцией исчерпания многообразия $\mathcal{M}$.

$\square$

1.1.9 Специальная функция исчерпания

Пусть $\mathcal{M}$ – риманово многообразие с кусочно-гладким краем $\partial\mathcal{M}$ (возможно пустым). Пусть $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$ – функция исчерпания граничного множества ξ, подчиненная условиям:

1) существует компактное множество $K \subset \mathcal{M}$ такое, что

$$h(m) \in C^2(\mathcal{M}) \cap C^1(\partial\mathcal{M} \setminus K);$$

2) h удовлетворяет на $\mathcal{M} \setminus K$ уравнению

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0 \quad (p > 1); \tag{1.1.20}$$

3) в каждой точке $m \in \partial\mathcal{M} \setminus K$, где край $\partial\mathcal{M}$ имеет касательную плоскость $T_m(\partial\mathcal{M})$, выполняется

$$\langle \nabla h(m), \nu \rangle = 0 \tag{1.1.21}$$

(здесь ν – единичный вектор внутренней нормали к границе $\partial\mathcal{M}$);

4) в окрестности каждой иррегулярной граничной точки градиент ∇h ограничен.

Функция исчерпания с указанными свойствами называется *специальной функцией исчерпания граничного множества* ξ. Если $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$ является функцией исчерпания многообразия $\mathcal{M}$ и удовлетворяет перечисленным условиям 1) – 4), то она называется *специальной функцией исчерпания многообразия* $\mathcal{M}$.

Теорема 1.1.1 *Пусть $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$ – специальная функция исчерпания граничного множества ξ многообразия $\mathcal{M}$. Тогда*

(i) если $h_0 = \infty$, то множество ξ имеет p-параболический тип;

(ii) если $h_0 < \infty$, то множество ξ имеет p-гиперболический тип.

Доказательство. Зафиксируем $0 < t_1 < t_2 < h_0$ так, чтобы $K \subset B_h(t_1)$. Мы имеем

$$\operatorname{cap}_p(B_h(t_1), \mathcal{M} \setminus B_h(t_2); \mathcal{M}) = \frac{J}{(t_2 - t_1)^{p-1}}\,, \tag{1.1.22}$$

где

$$J = \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}$$

есть величина, не зависящая от $t > h(K) = \sup\{h(m) : m \in K\}$.

Действительно, выберем в вариационной проблеме (1.1.11) функцию φ_0, $\varphi_0(m) = 0$ при $m \in B_h(t_1)$,

$$\varphi_0(m) = \frac{h(m) - t_1}{t_2 - t_1},\ m \in B_h(t_2) \setminus B_h(t_1)$$

и $\varphi_0(m) = 1$ при $m \in \mathcal{M} \setminus B_h(t_2)$. Пользуясь формулой Кронрода – Федерера, получаем

$$\mathrm{cap}_p(B_h(t_1), \mathcal{M} \setminus B_h(t_2); \mathcal{M}) \le \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla \varphi_0|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \le$$

$$\le \frac{1}{(t_2 - t_1)^p} \int\limits_{t_1 < h(m) < t_2} |\nabla h(m)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} =$$

$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)^p} \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h(m)|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Так как специальная функция исчерпания удовлетворяет уравнению (1.1.20) и имеет место граничное условие (1.1.21), для произвольной пары значений

$$\tau_1\,, \quad \tau_2\,, \quad h(K) < \tau_1 < \tau_2 < h_0\,,$$

имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(t_2)} |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} - \int\limits_{\Sigma_h(t_1)} |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_h(t_2)} |\nabla h|^{p-2} \langle \nabla h, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} - \int\limits_{\Sigma_h(t_1)} |\nabla h|^{p-2} \langle \nabla h, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} =$$

$$= \int\limits_{t_1<h(m)<t_2} \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) * \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = 0\,.$$

Таким образом, устанавливаем неравенство

$$\operatorname{cap}_p(B_h(t_1), \mathcal{M} \setminus B_h(t_2); \mathcal{M}) \le \frac{J}{(t_2-t_1)^{p-1}}\,.$$

В силу предположений, выполняющихся для специальной функции исчерпания, функция $\varphi_0(m)$ является экстремалью в вариационной проблеме (1.1.11). Эта экстремаль единственна и, тем самым, доставляет равенство в предыдущее соотношение. Данное заключение влечет справедливость (1.1.22).

Если $h_0 = \infty$, то, полагая $t_2 \to \infty$ в (1.1.22), заключаем о p-параболичности типа граничного множества ξ.

Предположим, что $h_0 < \infty$. Зададим произвольно исчерпание $\{\mathcal{U}_k\}$ и область $D \subset \mathcal{M}$. Выберем $t_0 > 0$ так, чтобы h-шар $B_h(t_0)$ содержал компактное множество K.

Поскольку тип $\xi = \{\mathcal{U}_k\}$ не зависит от выбора области D, без ограничения общности мы можем предполагать, что $D \supseteq B_h(t_0)$. Положим $t_k = \sup_{m\in\partial\mathcal{U}_k} h(m)$. При $t_k > t_0$ имеем

$$\operatorname{cap}_p(D, \mathcal{U}_k; \mathcal{M}) \ge \operatorname{cap}_p(B_h(t_0), B_h(t_k); \mathcal{M}) = J/(t_k - t_0)^{p-1}\,,$$

и, далее,

$$\liminf_{k\to\infty} \operatorname{cap}_p(D, \mathcal{U}_k; \mathcal{M}) \ge J/(h_0 - t_0)^{p-1} > 0.$$

Сказаное гарантирует, что граничное множество ξ имеет p-гиперболический тип. □

Пример 1.1.7 Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ – неограниченная область, $1 \le k < n$, и пусть $\mathcal{B}$ есть $(n-k)$-мерное компактное риманово многообразие с краем либо без края. Рассмотрим прямое риманово произведение $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (с надлежащей метрикой).

Обозначим через $x \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ и $(x, b) \in \mathcal{M}$ точки соответствующих многообразий. Пусть $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и $\eta : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ – естественные проекции многообразия $\mathcal{M}$.

Предположим, что функция $h(x)$ является специальной функцией исчерпания области $\mathcal{A}$, подчиненной условиям (1.1.20) и (1.1.21). Рассмотрим функцию $h^* = h \circ \pi : \mathcal{M} \to (0, h_0)$. Мы имеем

$$\nabla h^* = \nabla(h \circ \pi) = (\nabla_x h) \circ \pi$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(|\nabla h^*|^{p-2}\nabla h^*) &= \operatorname{div}\big(|\nabla(h\circ\pi)|^{p-2}\nabla(h\circ\pi)\big) = \\ &= \operatorname{div}\big(|\nabla_x h|^{p-2}\,(\nabla_x h)\circ\pi\big) = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(|\nabla_x h|^{p-2}\frac{\partial h}{\partial x_i}\big)\Big)\circ\pi\,.\end{aligned}$$

Поскольку $h(x)$ есть специальная функция исчерпания $\mathcal{A}$, то

$$\operatorname{div}(|\nabla h^*|^{p-2}\nabla h^*) = 0.$$

Проверим выполнимость предположения (1.1.21) для специальной функции исчерпания $\mathcal{M}$. Пусть $(x,b)\in\partial\mathcal{M}$ – произвольная точка, в которой край $\partial\mathcal{M}$ имеет касательную гиперплоскость, и пусть ν – вектор единичной нормали к $\partial\mathcal{M}$.

Если $x\in\partial\mathcal{A}$, то $\nu=\nu_1+\nu_2$, где вектор $\nu_1\in\mathbb{R}^k$ ортогонален границе $\partial\mathcal{A}$ и ν_2 – вектор из $T_b(\mathcal{B})$. Таким образом,

$$\langle\nabla h^*,\nu\rangle = \langle(\nabla_x h)\circ\pi,\nu_1\rangle = 0,$$

поскольку h является специальной функцией исчерпания на $\mathcal{A}$ и она удовлетворяет предположению (1.1.21) на $\partial\mathcal{A}$.

Если $b\in\partial\mathcal{B}$, то вектор ν ортогонален $\partial\mathcal{B}\times\mathbb{R}^k$ и

$$\langle\nabla h^*,\nu\rangle = \langle(\nabla_x h)\circ\pi,\nu\rangle = 0,$$

поскольку вектор $(\nabla_x h)\circ\pi$ параллелен $\mathbb{R}^k$.

Проверка других требований к специальной функции исчерпания многообразия $\mathcal{M}$ не вызывает трудностей.

Таким образом, функция

$$h^* = h^*(x,b) = h\circ\pi : \mathcal{M}\to(0,h_0) \tag{1.1.23}$$

есть специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{M}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

□

Пример 1.1.8 Пусть $\mathcal{A}$, $\dim\mathcal{A}=k\ge 1$, – компактное риманово многообразие с кусочно-гладким краем или без края. Рассмотрим декартово произведение $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Обозначим через $a \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $(a, x) \in \mathcal{M}$ точки соответствующих пространств. Легко видеть, что функция

$$h(a,x) = \begin{cases} \ln|x|, & p = n, \\ \\ |x|^{\frac{p-n}{p-1}}, & p \neq n \end{cases}$$

является специальной функцией исчерпания для многообразия $\mathcal{M}$. Таким образом, при $p \geq n$ данное многообразие имеет p-параболический тип и при $p < n$ – p-гиперболический.

□

Пример 1.1.9 Пусть (r, θ), где $r \geq 0$, $\theta \in S^{n-1}(0,1)$, – сферические координаты в $\mathbb{R}^n$. Пусть $U \subset S^{n-1}(0,1)$ – произвольная область на единичной сфере $S^{n-1}(0,1)$. Зафиксируем $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$ и рассмотрим область

$$D = \big\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^n : r_1 < r < r_2,\ \theta \in U\big\} \tag{1.1.24}$$

с метрикой

$$ds^2_{\mathcal{M}} = \alpha^2(r)dr^2 + \beta^2(r)dl^2_\theta, \tag{1.1.25}$$

где $\alpha(r)$, $\beta(r) > 0$ суть C^0-функции на $[r_1, r_2)$ и dl_θ есть элемент длины на $S^{n-1}(0,1)$.

Многообразие $\mathcal{M} = (D, ds^2_{\mathcal{M}})$ является искривленным римановым произведением. В случае, когда $\alpha(r) \equiv 1$, $\beta(r) = 1$ и $U = S^{n-1}(0,1)$, многообразие $\mathcal{M}$ изометрично цилиндру в $\mathbb{R}^{n+1}$. В случае $\alpha(r) \equiv 1$, $\beta(r) = r$, $U = S^{n-1}(0,1)$ многообразие $\mathcal{M}$ является сферическим кольцом в $\mathbb{R}^n$.

Элемент объема в метрике (1.1.25) задается выражением

$$d\sigma_{\mathcal{M}} = \alpha(r)\, \beta^{n-1}(r)\, dr\, dS^{n-1}\,, \quad S^{n-1} = S^{n-1}(0,1)\,.$$

Если $\phi(r, \theta) \in C^1(D)$, то

$$|\nabla\phi|^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\phi'_r)^2 + \frac{1}{\beta^2}|\nabla_\theta\phi|^2,$$

где $\nabla_\theta\phi$ – градиент в метрике единичной сферы $S^{n-1}(0,1)$.

Для специальной функции исчерпания $h(r,\theta) \equiv h(r)$ уравнение (1.1.20) имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\left(\frac{1}{\alpha(r)}\right)^{p-1}\left(h'_r(r)\right)^{p-1}\beta^{n-1}(r)\right) = 0.$$

Решения данного уравнения суть функции

$$h(r) = C_1 \int\limits_{r_1}^{r} \frac{\alpha(t)}{\beta^{\frac{n-1}{p-1}}(t)}\, dt + C_2\,,$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

Так как функция $h(r)$, очевидно, удовлетворяет граничному условию (1.1.21), как и другим условиям раздела 1.1.9, мы находим, что при выполнении предположения

$$\int^{r_2} \frac{\alpha(t)}{\beta^{\frac{n-1}{p-1}}(t)}\, dt = \infty \tag{1.1.26}$$

функция

$$h(|x|) = \int\limits_{r_1}^{|x|} \frac{\alpha(t)}{\beta^{\frac{n-1}{p-1}}(t)}\, dt\,, \quad |x| < r_2\,, \tag{1.1.27}$$

есть специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{M}$.

□

Пример 1.1.10 Зафиксируем целое k, $1 \le k \le n$, и положим

$$d_k(x) = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Легко видеть, что $|\nabla d_k(x)| = 1$ всюду в $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : d_k(x) = 0\}$. Множество

$$B_k(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_k(x) < t\}$$

есть k-шар, а множество

$$\Sigma_k(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_k(x) = t\}$$

есть k-сфера в $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является *k-допустимой,* если для каждого $t > \inf_{x \in D} d_k(x)$ множество $D \cap B_k(t)$ предкомпактно.

Ясно, что всякая неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является n-допустимой. В общем случае область D является k-допустимой тогда и только тогда, когда функция $d_k(x)$ есть функция исчерпания D. Нетрудно видеть, что если область $D \subset \mathbb{R}^n$ является k-допустимой, то она и l-допустима при любом $k < l \leq n$.

Фиксируем $1 \leq k < n$. Пусть Δ – ограниченная область в плоскости $x_1 = \ldots = x_k = 0$ и пусть

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n : (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \overline{\Delta}\} \qquad (1.1.28)$$

– замкнутая область в $\mathbb{R}^n$.

Область D является k-допустимой. Поверхности $\Sigma_k(t)$ ортогональны границе ∂D и, тем самым, $\langle \nabla d_k, \nu \rangle = 0$ всюду на границе. Функция

$$h(x) = \begin{cases} \ln d_k(x) \quad \text{при} \quad p = k\,, \\ \\ d_k^{(p-k)/(p-1)}(x) \quad \text{p} \neq k \end{cases} \qquad (1.1.29)$$

является специальной функцией исчерпания области D. Тем самым, при $p \geq k$ область D имеет p-параболический тип, и p-гиперболический – при $p < k$.

□

1.2 Граничные множества абстрактной поверхности

В разделе приводятся признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств абстрактных поверхностей вида $\Omega = (D, H, k)$. Указывается связь между изопериметрическими свойствами поверхности и гиперболичностью типа. Рассматриваются поверхности, расположенные над областями специального вида.

1.2.1 Признаки параболичности и гиперболичности

Пусть $\Omega = (D, H, k)$ – абстрактная поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть ξ – некоторое граничное множество поверхности Ω. Зафиксируем локально липшицеву функцию

$$h(x) : D \to (0, h_0)\,, \quad 0 < h_0 \leq \infty\,,$$

такую, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_K |\nabla h(x)| > 0 \quad \text{для любого} \quad K \subset\subset D\,.$$

Как и выше, для произвольного $t \in (0, h_0)$ полагаем

$$B_h(t) = \{x \in D : h(x) < t\}\,,$$

$$\Sigma_h(t) = \{x \in D : h(x) = t\}$$

и, далее,

$$U_h(t) = D \setminus \overline{B_h}(t) = \{x \in D : h(x) > t\}\,.$$

Ясно, что функция $h(x)$ исчерпывает граничное множество ξ, тогда и только тогда, когда для любой последовательности

$$\{t_m\}_{m=1}^{\infty}\,, \quad t_m < t_{m+1}\,, \quad t_m \to h_0\,,$$

цепь подобластей $\{U_h(t_m)\}$ определяет ξ.

Пусть $h(x)$ – функция исчерпания граничного множества ξ, $p > 1$ и пусть

$$\lambda_h(t) = \int\limits_{\Sigma_h(t)} G^p(x, \nabla h)\, \frac{k(x)}{|\nabla h(x)|}\, d\mathcal{H}^{n-1}\,,$$

где $d\mathcal{H}^{n-1}$ – элемент $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на множестве $\Sigma_h(t)$.

Согласно формуле Кронрода – Федерера для ко-площади имеем

$$\int\limits_D G^p(x,\nabla h)\,d\Omega = \int\limits_0^{h_0} \lambda_h(t)\,dt\,.$$

Тем самым, для почти всех $t \in (0,h_0)$ величина $\lambda_h(t)$ положительна. Параболичность либо гиперболичность типа граничного множества ξ зависит от поведения величины $\lambda_h(t)$ в окрестности точки h_0. Имеет место

Теорема 1.2.1 *Если*

$$\int\limits^{h_0} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t) = +\infty\,, \quad p>1\,, \tag{1.2.1}$$

то граничное множество ξ *имеет p-параболический тип в метрике поверхности* Ω.

Доказательство. Зададим $\tau_2 > \tau_1$ так, чтобы $0<\tau_1<\tau_2<h_0$. Оценим p-емкость конденсатора $(\overline{\Delta},\overline{U}_h(\tau_2);D)$, где $\Delta \subset\subset B_h(\tau_1)$ – подобласть D. Выберем произвольно локально липшицеву на $(0,h_0)$ функцию $\varphi(t)$, равную 1 при $t\le\tau_1$ и обращающуюся в 0 при $t\ge\tau_2$. Функция $\varphi(h(x))$ допустима в вариационной задаче (1.1.11) при вычислении емкости конденсатора. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta},\overline{U}_h(\tau_2);D) &\le \int\limits_D k(x)\,G^p(x,\nabla\varphi)\,dx_1\ldots dx_n = \\
&= \int\limits_{\tau_1<h(x)<\tau_2} k(x)\,\varphi'^p(h(x))\,G^p(x,\nabla h)\,dx_1\ldots dx_n\,.
\end{aligned}$$

На основании формулы Кронрода – Федерера имеем

$$\int\limits_{\tau_1<h(x)<\tau_2} k(x)\,\varphi'^p(h(x))\,G^p(x,\nabla h)\,dx_1\ldots dx_n = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi'^p(t)\lambda_h(t)\,dt\,,$$

и потому

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta},\overline{U}_h(\tau_2);D) \le \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi'^p(t)\lambda_h(t)\,dt\,. \tag{1.2.2}$$

Найдем минимум правой части (1.2.2). Для произвольной функции $\varphi(t)$ выполнено

$$1 \le \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\varphi'(t)|\,dt \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi'^p\lambda_h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t)\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Следовательно, всегда

$$\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t)\,dt\right)^{1-p} \le \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi'^p\lambda_h(t)\,dt\,. \tag{1.2.3}$$

Выберем функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \left(\int\limits_{\tau_1}^{t} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t)\,dt\right) \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t)\,dt\right)^{-1}$$

при $t \in [\tau_1,\tau_2]$, $\varphi(t) = 1$ при $t < \tau_1$ и $\varphi(t) = 0$ при $t > \tau_2$. Легко видеть, что данная функция доставляет равенство в (1.2.3), а потому из (1.2.2) получаем

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta},\overline{U}_h(\tau_2);D) \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(t)\,dt\right)^{1-p}. \tag{1.2.4}$$

Полагая $\tau_2 \to h_0$ в (1.2.4), в силу условия (1.2.1) заключаем, что

$$\lim_{t\to h_0} \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta},\overline{U}_h(t);D) = 0\,.$$

Лемма 1.1.3 позволяет сделать вывод, что граничное множество ξ имеет p-параболический тип в метрике Ω. □

1.2.2 "Взвешенные" объемы

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $\Omega = (D, H, k)$ – абстрактная поверхность, заданная над областью D линейным элементом (1.1.1) так, что

$$H(x, dx) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j \right)^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

где $g_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ – определенные почти всюду в области D функции и квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j$$

положительно определена.

Мы предполагаем также, что плотность $k(x)$ в определении абстрактной поверхности задается в выражением $k(x) = \sqrt{g}$, $g = \det(g_{ij}) \geq 0$, и почти всюду положительна. Элемент объема поверхности Ω в данном случае имеет вид

$$d\Omega = \sqrt{g}\, dx\,, \quad dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n\,. \tag{1.2.6}$$

Пример 1.2.1 Указанным предположениям удовлетворяют, к примеру, локально билипшицевы поверхности, описанные в примере 1.1.3. В частности, рассмотрим график Ω локально липшицевой функции $t = f(x)$, заданной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Здесь почти всюду в D выполнено

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + f'_{x_i} f'_{x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2.7}$$

и

$$g = 1 + |\nabla f|^2\,, \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{f_{x_i} f_{x_j}}{1 + |\nabla f|^2}\,. \tag{1.2.8}$$

□

Положим

$$G^2(x, \xi) \equiv \mathcal{E}_\Omega(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j\,, \tag{1.2.9}$$

где $g^{ij}(x)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ – элементы матрицы, обратной к матрице (g_{ij}).

Легко видеть, что при $\xi \in T_x(\Omega)$ величина $\mathcal{E}_\Omega(\xi)$ совпадает с квадратом длины $|\xi|^2_\Omega$ ковектора ξ.

Для произвольной пары точек x', $x'' \in D$ пусть $s_\Omega(x',x'')$ означает расстояние между x', x'' в метрике поверхности $\Omega = (D, H, \sqrt{g})$, т.е.

$$s_\Omega(x',\, x'') = \inf \int\limits_\gamma h_\gamma(x)\, ds_\gamma\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным локально спрямляемым дугам $\gamma \subset D$, соединяющим x' и x''.

Будем говорить, что функция $h(x) : D \to \mathbb{R}$ является *липшицевой в метрике поверхности* Ω, если существует постоянная $0 < c < \infty$ такая, что для любых x', $x'' \in D$ выполнено

$$|h(x') - h(x'')| \le c\, s_\Omega(x',x'')\,. \tag{1.2.10}$$

Следующий признак p-параболичности граничных множеств ξ (в метрике поверхности) мы формулируем в терминах "взвешенного" объема.

Теорема 1.2.2 *Предположим, что граничное множество ξ поверхности $\Omega = (D, H, \sqrt{g})$ имеет липшицеву в метрике ds_Ω функцию исчерпания $h(x) : D \to (0, +\infty)$. Тогда каждое из перечисленных ниже условий влечет p-параболичность ξ:*

(i) существуют постоянные $a_0 > 0$ и $0 < s < p$ такие, что

$$\liminf_{\tau \to +\infty} \tau^{s-p} \int\limits_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-s} \sqrt{g}\, dx < \infty\,; \tag{1.2.11}$$

(ii) для некоторой постоянной $a_0 > 0$ выполнено

$$\liminf_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\ln^p \tau} \int\limits_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-p} \sqrt{g}\, dx < \infty\,; \tag{1.2.12}$$

(*iii*) *существует постоянная* $s > p$ *такая, что*

$$\liminf_{\tau\to+\infty} \tau^{s-p} \int\limits_{\tau<h(x)} h^{-s}\sqrt{g}\,dx < \infty\,. \tag{1.2.13}$$

Доказательство. Заметим сначала, что при любых $s > 0$ и $0 < \tau_1 < \tau_2$ выполнено

$$\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{p}}\,d\tau\right)^p \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\lambda_h(\tau)}{\tau^s}\,d\tau\right) \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{p-1}.$$

Отсюда получаем

$$\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{p}}\,d\tau\right)^{-p} \times \\ \times \int\limits_{\tau_1<h(x)<\tau_2} \mathcal{E}_\Omega^{p/2}(\nabla h)\,\frac{\sqrt{g}}{h^s}\,dx\,. \tag{1.2.14}$$

Так как функция исчерпания $h(x)$ удовлетворяет (1.2.10), то в каждой точке дифференцируемости функции $h(x)$ выполнено

$$\mathcal{E}_\Omega(\nabla h(x)) \le c^2\,,$$

где c – постоянная из (1.2.10). Это ясно, если вспомнить, что величина $\mathcal{E}_\Omega(\nabla h(x))$ есть квадрат модуля градиента h в метрике поверхности F. Формальное доказательство можно найти, например, в [44, п. 3.3].

Из соотношения (1.2.14) следует

$$\left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \le c^p \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{p}}\,d\tau\right)^{-p} \times \times \int\limits_{\tau_1<h(x)<\tau_2} h^{-s}\sqrt{g}\,dx\,. \tag{1.2.15}$$

Условие (1.2.11) влечет

$$\left(\int\limits_{a_0}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \le c_1 \lim\inf_{\tau\to+\infty} \tau^{s-p} \int\limits_{a_0<h(x)<\tau} h^{-s}\sqrt{g}\,dx < \infty\,.$$

Постоянная c_1 и предел в правой части не зависят от величины $a_0 > 0$. Это возможно в том и только том случае, когда выполнено (1.2.1). На основании теоремы 1.2.1 делаем вывод о p-параболичности граничного множества ξ в случае (i).

В случае (ii) из (1.2.12) и (1.2.15) выводим

$$\left(\int\limits_{a_0}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \le c^p \lim\inf_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\ln^p\tau} \int\limits_{a_0<h(x)<\tau} h^{-p}\sqrt{g}\,dx < \infty\,.$$

Как и выше, убеждаемся в p-параболичности граничного множества ξ.

Пусть $s > p$. Переходя к пределу при $\tau_2 \to +\infty$ в (1.2.15), при всяком $\tau_1 = \tau > 0$ имеем

$$\left(\int\limits_{\tau}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \le c_2\,\tau^{s-p} \int\limits_{\tau<h(x)} h^{-s}\sqrt{g}\,dx < \infty\,.$$

Условие (1.2.13) влечет (1.2.1) и тем самым p-параболичность ξ. $\square$

Задача 1.2.16 *Другие варианты теоремы 1.2.1, сформулированные в терминах взвешенных объемов, см. в работе [42]. Однако относительно возможности применения этих признаков параболичности в конкретных оценках для решений уравнений типа минимальной поверхности пока не ясно. Было бы интересно исследовать данный вопрос более полно.*

1.2.3 Изопериметрия и гиперболичность

Ниже мы укажем один признак гиперболичности типа, формулируемый в терминах изопериметрии [78]. Пусть $\Omega = (D, H, \sqrt{g})$ – абстрактная поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, как в разделе 1.2.2. Пусть $\xi \asymp \{U_m\}_{k=1}^{\infty}$ – граничное множество поверхности Ω. Зафиксируем произвольно подобласть $\Delta \subset\subset U_1$ и рассмотрим класс подобластей $\{G\}$, содержащих множество $\overline{\Delta}$ и таких, что $G \cap U_m = \emptyset$ для некоторого $m = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $V_\Omega(G)$ объем $G \setminus \overline{\Delta}$ в метрике поверхности Ω, через $S_\Omega(\partial' G)$ – $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа в метрике ds_Ω относительной границы $\partial' G = \partial G \cap D$, т.е.

$$V(G) = \int\limits_G \sqrt{g(x)}\, dx_1 \ldots dx_n \quad \text{и} \quad S_\Omega(\partial' G) = \int\limits_{\partial' G} H(x, dx)\,.$$

Предположим, что существует непрерывная, положительная на $[0, v)$, $v = V_\Omega(D)$, функция $\theta(\tau)$ такая, что для всякой подобласти $G \in \{G\}$ выполнено

$$\theta(V_\Omega(G)) \leq S_\Omega(\partial' G)\,. \tag{1.2.17}$$

Функцию θ будем называть *изопериметрической функцией* граничного множества ξ.

Теорема 1.2.3 *Если граничное множество ξ поверхности $\Omega = (D, H, \sqrt{g})$ имеет изопериметрическую функцию $\theta(\tau)$, удовлетворяющую условию*

$$\int\limits^{v} \theta^{\frac{p}{1-p}}(\tau)\, d\tau < \infty\,, \quad p > 1\,, \tag{1.2.18}$$

то множество ξ имеет p-гиперболический тип в метрике поверхности Ω.

Доказательство. Зададим конденсатор $(\overline{\Delta}, \overline{U}_m; D)$, $m = 1, 2, \ldots$, и некоторую функцию $\varphi : D \to [0, 1]$, допустимую в вариационной задаче (1.1.11) при вычислении его емкости. Нашей целью является получение оценки снизу p-емкости конденсатора $(\overline{\Delta}, \overline{U}_m; D)$. Не ограничивая общности, можем считать, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D \setminus (\overline{\Delta} \cup \overline{U}_m)$ выполнено $0 < \varphi(x) < 1$, причем

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{x \in D'} |\nabla \varphi(x)| \leq \operatorname{ess}\sup_{x \in D'} |\nabla \varphi(x)| < \infty\,.$$

Для произвольного $t \in [0, 1]$ полагаем

$$G(t) = \{x \in D : t < \varphi(x) < 1\}\,, \quad I(t) = \{x \in D : \varphi(t) = t\}$$

и, далее,

$$V(t) = V_\Omega(G(t)) = \int\limits_{G(t)} \sqrt{g(x)}\, dx\,,$$

$$U(I(t)) = \int\limits_{I(t)} \frac{G(x, \nabla \varphi|)}{|\nabla \varphi|} \sqrt{g(x)}\, |dx|\,.$$

Так как функция φ локально липшицева, то в силу теоремы 1.5.1 [86], множества $I(t)$ счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$–спрямляемы для почти всех $t \in (0, 1)$. Тем самым, для почти всех $t \in (0, 1)$ выполнено

$$S_\Omega(I(t)) = \int\limits_{I(t)} H(x, dx)\,. \tag{1.2.19}$$

В соответствии с теоремой 1.5.2 указанной монографии $\mathcal{H}^{n-1}$–почти всюду на таких поверхностях $I(t)$ существуют касательные к ним гиперплоскости. Пусть $a \in I(t)$ – точка с отмеченными свойствами. Зададим ортонормальный базис $e_1, \ldots, e_n$ в точке a так, чтобы квадратичная форма $H^2(a, dx)$ имела вид

$$H^2(a, dx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, dx_i^2\,, \quad \lambda_i > 0\,.$$

Тогда $g(a) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ и

$$G^2(a, dx) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\, dx_i^2\,.$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – нормальный в точке a к $I(t)$ единичный вектор. Для произвольного касательного в точке a к $I(t)$ единичного вектора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ мы имеем

$$H(a, \tau)\, g^{-1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}\, \tau_i^2 \right)^{1/2} =$$

По формуле Кронрода – Федерера

$$\int\limits_{G(t)\setminus\Delta} dx = \int\limits_{t}^{1} dt \int\limits_{I(t)} \frac{|dx|}{|\nabla\varphi|}\,.$$

Отсюда

$$V'(t) = -\int\limits_{I(t)} \frac{|dx|}{|\nabla\varphi|}\,.$$

Заметим, что

$$\left(\int\limits_{I(t)} \frac{|\nabla_F\varphi|}{|\nabla\varphi|}\,|dx| \right)^p \le \left(\int\limits_{I(t)} \frac{|\nabla_F\varphi|^p}{|\nabla\varphi|}\,|dx| \right) \times$$

$$\times \left(\int\limits_{I(t)} \frac{|dx|}{|\nabla\varphi|} \right)^{p-1}\,.$$

Так как $\partial' G(t) \subset I(t)$, то в силу условия изопериметричности (1.2.17) граничного множества ξ имеем

$$\theta\left(V_\Omega(G(t))\right) \le S_\Omega(\partial' G(t)) \le \int\limits_{I(t)} \frac{|\nabla_\Omega \varphi|}{|\nabla\varphi|}\,|dx|\,,$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned}\int\limits_D |\nabla_\Omega\varphi|^p\,dx &= \int\limits_0^1 dt \int\limits_{I(t)} \frac{|\nabla_\Omega\varphi|^p}{|\nabla\varphi|}\,|dx| \ge \\ &\ge \int\limits_0^1 \theta^p\left(V(t)\right)|V'(t)|^{1-p} dt\,.\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Пусть $t = t(V)$ – функция, обратная к функции $V = V(t)$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \theta^p(V(t))|V'(t)|^{1-p}\,dt = \int\limits_{V_0}^{V_m} \theta^p(\tau)|t'(\tau)|^p\,d\tau\,,$$

где

$$V_0 = V_\Omega(\Delta)\,,\quad V_m = V_\Omega(D\setminus U_m)\,.$$

Замечая, что

$$1 \le \left(\int\limits_{V_0}^{V_m} |t'(\tau)|\,d\tau\right)^p \le \left(\int\limits_{V_0}^{V_m} \theta^p(\tau)\,|t'(\tau)|^p\,d\tau\right)\left(\int\limits_{V_0}^{V_m} \theta^{\frac{p}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{p-1},$$

выводим

$$\int\limits_0^1 \theta^p(V(t))\,|V'(t)|^{1-p}\,dt \ge \left(\int\limits_{V_0}^{V_m} |t'(\tau)|^{\frac{p}{1-p}}\,d\tau\right)^{1-p}.$$

Неравенство (1.2.20) позволяет теперь заключить, что

$$\int\limits_D |\nabla_\Omega(\varphi)|^p\,dx \geq \left(\int\limits_{V_0}^{V_m} \theta^{\frac{p}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p}.$$

Переходя к точной нижней грани по φ, приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_{V_0}^{V_m} \theta^{\frac{p}{1-p}}(\tau)\,d\tau\right)^{1-p} \leq \mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta}, \overline{U}_m; D)\,. \tag{1.2.21}$$

В силу условия (1.2.18) для изопериметрической функции θ из (1.2.21) находим

$$\lim_{m\to\infty}\inf\,\mathrm{cap}_{\Omega,p}(\overline{\Delta}, \overline{U}_m; D) > 0\,.$$

Это означает, что граничное множество ξ имеет p-гиперболический тип. $\square$

1.2.4 "Угловые" и "цилиндрические" области

Пусть (r,ω) – сферические координаты в $\mathbb{R}^n$ с полюсом в точке $x = 0$, $d\omega$ – элемент $(n-1)$-мерной площади на единичной сфере $S^{n-1}(0,1)$. Обозначим через l_ω луч, выходящий из начала координат $\mathbb{R}^n$ в направлении $\omega \in S^{n-1}(0,1)$, через

$$K(\tau', \tau'') = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau' < |x| < \tau''\}$$

– сферическое кольцо. Выберем произвольно область $\Delta \subset S^{n-1}(0,1)$ и постоянные $0 \leq a < b \leq +\infty$. Положим

$$D(a,b;\Delta) = \{x \in K(a,b) : x \in l_\omega,\ \omega \in \Delta\}\,.$$

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D,H,k)$, заданную над "угловой" областью $D = D(a,b;\Delta)$ посредством линейного элемента (1.2.5) и элемента объема (1.2.6). Пусть

$$\delta(r,\omega)\,dr = H(x,dx)|_{l_\omega}\,, \quad \omega \in \Delta\,,\ a < r < b\,,$$

означает сужение ds_Ω на l_ω.

Зададим граничное множество ξ на Ω цепью $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ областей

$$U_m = \{x \in D(a,b;\Delta) : \tau_m < |x|\}\,,$$

где

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < \ldots\,, \quad \lim_{m\to\infty} \tau_m = b\,,$$

– произвольная последовательность чисел.

Имеет место

Теорема 1.2.4 *Предположим, что имеется измеримое множество*

$$E \subset \Delta\,, \quad \mathcal{H}^{n-1}(E) > 0\,,$$

такое, что для всякой точки $\omega \in E$ *выполнено*

$$\int^{b} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\,\delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\,r^{\frac{n-1}{1-p}}\,dr < \infty\,. \tag{1.2.22}$$

Тогда граничное множество ξ *имеет* (Ω,p)*-гиперболический тип.*

Доказательство. Зафиксируем $m > 1$ и оценим снизу емкость конденсатора $(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)$. В силу теоремы 1.1.1 имеем

$$\mathrm{cap}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D) = \mathrm{mod}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)\,.$$

Пусть ρ – произвольная функция, допустимая при вычислении модуля данного конденсатора. Так как прямолинейный отрезок $l_\omega \cap K(\tau_1,\tau_m)$ содержится в $D(a,b;\Delta)$ и соединяет множества $D \setminus U_1$ и U_m, то для всякого направления $\omega \in \Delta$ выполнено

$$1 \le \int\limits_{l_\omega \cap K(\tau_1,\tau_m)} \rho(x)\,ds_F = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} \rho(r,\omega)\,\delta(r,\omega)\,dr\,.$$

Отсюда получаем

$$1 \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} \rho^p(x) k(x) r^{n-1} dr\right) \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\,\delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\,r^{\frac{n-1}{1-p}}\,dr\right)^{p-1}\,,$$

а потому

$$\int\limits_{\Delta} d\omega \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\, \delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\, r^{\frac{n-1}{1-p}}\, dr \right)^{1-p} \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta} d\omega \int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} \rho^p(x)\, k(x)\, r^{n-1}\, dr \le \int\limits_{D(a,b;\Delta)} \rho^p\, d\Omega\,.$$

Поскольку допустимая функция $\rho(x)$ произвольна, то, переходя здесь к точной нижней грани по ρ, находим

$$\int\limits_{\Delta} d\omega \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\, \delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\, r^{\frac{n-1}{1-p}}\, dr \right)^{1-p} \le \operatorname{mod}_{k,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)\,.$$

Тем самым приходим к нужной оценке

$$\int\limits_{\Delta} d\omega \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\, \delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\, r^{\frac{n-1}{1-p}}\, dr \right)^{1-p} \le \tag{1.2.23}$$

$$\le \operatorname{cap}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)\,.$$

Из (1.2.23) выводим

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Delta} d\omega \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(r,\omega)\, \delta^{\frac{p}{p-1}}(r,\omega)\, r^{\frac{n-1}{1-p}}\, dr \right)^{1-p} \le$$

$$\le \lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)\,.$$

Условие (1.2.22) тогда влечет

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D) > 0\,.$$

Выполнение данного свойства хотя бы для одной цепи из класса эквивалентности ξ означает (Ω, p)-гиперболичность типа граничного множества ξ. $\Box$

Использованный прием оценки (k, p)-емкости конденсатора снизу пригоден для широкого класса "правильных" областей в $\mathbb{R}^n$ или, в общем случае, для областей на многообразиях с системой полугеодезических координат. Мы оставляем общий случай заинтересованному читателю в качестве задачи, ограничиваясь здесь только рассмотрением случая граничных множеств цилиндрических областей в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Δ – ограниченная область в гиперплоскости $x_1 = 0$ пространства $\mathbb{R}^n$. Зададим постоянные $-\infty \le a < b \le +\infty$ и определим область $D = D(a, b; \Delta)$ в $\mathbb{R}^n$ как декартово произведение $(a, b) \times \Delta$.

Пусть $\Omega = (D, H, k)$ – абстрактная поверхность над "цилиндрической" областью $D = D(a, b; \Delta)$, задаваемая посредством линейного элемента (1.2.5) и элемента объема (1.2.6). Для фиксированной точки $'x = (x_2,\, x_2, \ldots,\, x_n) \in \Delta$, как и выше, полагаем

$$\delta(x_1,\, 'x)\, d\tau = H(x, dx)|_{l_{'x}}\ ,$$

где

$$l_{'x} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_2, \ldots, x_n) = \, 'x \in \Delta\}\,,$$

Предположим, что граничное множество ξ поверхности Ω задано цепью $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ областей

$$U_m = \{x = (x_1,\, 'x) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \tau_m\}\,,$$

где

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < \ldots\ , \qquad \lim_{m\to\infty} \tau_m = b\,,$$

Справедлива

Теорема 1.2.5 *Если существует множество $E \subset \Delta$, $\mathcal{H}^{n-1}(E) > 0$, такое, что для любого $'x \in E$ выполнено*

$$\int^{b} k^{\frac{1}{1-p}}(\tau,\, 'x)\, \delta^{\frac{n}{n-1}}(\tau,\, 'x)\, d\tau < \infty\,, \qquad (1.2.24)$$

то граничное множество ξ имеет (Ω, p)-гиперболический тип.

Доказательство. Как и выше, достаточно получить оценку (Ω, p)-модуля конденсатора $(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)$, $m > 1$. Отрезок $l_{'x} \cap (U_1 \setminus U_m)$, $'x \in \Delta$, соединяет в D множества $D \setminus U_1$ и U_m. Поэтому для любой, допустимой при вычислении модуля конденсатора $(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)$ функции $\rho(x) = \rho(x_1, 'x)$ при $'x \in \Delta$ имеем

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} \rho(\tau, 'x)\, \delta(\tau, 'x)\, d\tau \geq 1\,.$$

Отсюда

$$1 \leq \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} \rho^p\, k\, d\tau \right) \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}\, \delta^{\frac{p}{p-1}}\, d\tau \right)^{p-1}$$

и, далее, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Delta} d\,'x \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_m} k^{\frac{1}{1-p}}(\tau, 'x)\, \delta^{\frac{n}{n-1}}(\tau, 'x)\, d\tau \right)^{1-p} \leq$$
$$\leq \operatorname{mod}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D)\,. \tag{1.2.25}$$

Неравенство (1.2.25) вместе с условием (1.2.24) гарантирует, что

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mod}_{\Omega,p}(D \setminus U_1, \overline{U}_m; D) > 0\,.$$

Используя теорему 1.1.1, получаем нужное. $\square$

Замечание 1.2.1 Сделаем замечание к истории вопроса. Впервые связь между скоростью роста объема геодезического шара на многообразии и параболичностью типа многообразия была установлена при $p = 2$ Ченгом и Яу [132]. В случае, когда $p = 2$, $s = 0$ и $h(x)$ – геодезическое расстояние от некоторой фиксированной точки на поверхности, условие (1.2.11) параболичности из теоремы 1.2.2 является некоторой модификацией указанного результата Ченга и Яу.

В случае $p = 2$ условие (1.2.12) было использовано В.М. Миклюковым [71] в процессе доказательства параболичности типа графиков решений уравнений типа минимальной поверхности (см. также [88], [43] и в случае произвольного $p = n \geq 2$ — [41]).

Условие p-гиперболичности (1.2.18) граничного множества ξ в случае евклидовой метрики $ds_\Omega = |dx|$ можно получить из известных оценок p-емкости (см., например, [65, стр. 96]). В случае, когда Ω – полное риманово многообразие и $p = 2$ условие (1.2.18) гиперболичности типа Ω получено А.А. Григорьяном [33] (см. также [41] для произвольного $p > 1$).

Условие p-параболичности (1.2.13), как и условия p-гиперболичности типа (1.2.22) и (1.2.24) впервые, видимо, были получены в [78]. Вместе с тем оценки (1.2.23) и (1.2.25), на которых базируются эти условия, в случае евклидовой метрики $ds_\Omega = |dx|$ были известны еще Тейхмюллеру [235] (см. также [22, стр. 169-172]).

1.3 Графики

Целью данного раздела является получение признаков 2-параболичности и 2-гиперболичности граничных множеств поверхностей $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющихся графиками локально липшицевых решений $x_{n+1} = f(x)$ дифференциальных уравнений типа минимальной поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$ либо максимальной поверхности в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Проблема получения эффективных условий параболичности и гиперболичности типа для явно заданных гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{n+1}$ была поставлена Дж. Милнором [214].

1.3.1 Оценка модуля конденсатора на графике

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и

$$A(x,\xi) = (A_1(x,\xi),\, A_2(x,\xi), \ldots,\, A_n(x,\xi))$$

– вектор-функция класса C^1, определенная для всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют постоянные ν_1, $\nu_2 > 0$ такие, что всюду на $D \times \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\nu_1 \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \le \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, A_i(x,\xi)\,, \tag{1.3.1}$$

$$|A(x,\xi)| \le \nu_2 \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\,. \tag{1.3.2}$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{L}[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f)\,. \tag{1.3.3}$$

Отметим, что условиям (1.3.1), (1.3.2) с постоянными $\nu_1 = \nu_2 = 1$ удовлетворяет, в частности, оператор средней кривизны

$$\mathcal{L}_0[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right)\,. \tag{1.3.4}$$

Введем обозначения. Пусть

$$\chi = (x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

– произвольная точка в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x_{n+1} = f(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$(E, f) = \left\{ \chi = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq \frac{x_{n+1}}{f(x)} \leq 1 \,, \quad x \in E \right\} .$$

Пусть Δ – подобласть области D. Зафиксируем конденсатор $(P, Q; \Delta)$ и обозначим через $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ множества точек $\chi \in \mathbb{R}^{n+1}$, лежащих на графике F функции $x_{n+1} = f(x)$ над множествами P, Q соответственно. Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим множество локально спрямляемых дуг $\tilde{\gamma}$, лежащих на части F, высекаемой цилиндром $\Delta \times \mathbb{R}^1$, и соединяющих $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$.

Пусть $\mathcal{R}(\chi) \geq 0$ – произвольная непрерывная на $\Delta \times \mathbb{R}^1$ и удовлетворяющая условию Липшица локально на $\Delta \times \mathbb{R}^1$ функция. Введем величину

$$d(\mathcal{R}) = \inf_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \mathcal{R}(\chi) \, |d\chi| \,. \tag{1.3.5}$$

Основным средством для оценок 2-модуля $\text{mod}_{2,F}(P, Q; \Delta)$ конденсатора $(P, Q; \Delta)$ на поверхности F является

Теорема 1.3.1 *Предположим, что дифференциальное выражение $\mathcal{L}[f]$ определенно соотношением* (1.3.3) *и удовлетворяет условиям* (1.3.1), (1.3.2). *Тогда для произвольной функции f класса C^2 в D, произвольной $\mathcal{R}(\chi) \geq 0$ и произвольного конденсатора $(P, Q; \Delta)$ выполнено*

$$\nu_1 \text{mod}_{F,2}(P, Q; \Delta) \leq \frac{2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}{d^2(\mathcal{R})} \int\limits_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| \, d\chi \, +$$

$$+ \frac{\nu_2}{d^2(\mathcal{R})} \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) \, dx - \frac{1}{d^2(\mathcal{R})} \int\limits_{\Delta} \mathcal{L}[f(x)] \, dx \int\limits_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) \, dt \, +$$

$$+ \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} \liminf \int\limits_{(\partial \Delta_m, f)} \mathcal{R}^2(\chi) \, \mathcal{H}^n(d\chi) \,, \tag{1.3.6}$$

где $\nabla \mathcal{R}(\chi) = \nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{R}(\chi)$ и нижний предел берется по всевозможным последовательностям ограниченных областей Δ_m, $\overline{\Delta}_m \subset \Delta$, с кусочно-гладкими границами.

Задача 1.3.7 *Следует отметить, что оценка (1.3.6) остается содержательной, если, во-первых, при вычислении точной нижней грани в (1.3.5) рассматривать (более широкое, нежели $\tilde{\Gamma}$) множество всех кривых, лежащих в цилиндре $\Delta \times \mathbb{R}^1$ и соединяющих $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ а, во-вторых, расширить множества (Δ, f), $(\partial\Delta_m, f)$, по которым производится интегрирование в (1.3.6), заменив их на множества $\Delta \times \mathbb{R}^1$, $\partial\Delta_m \times \mathbb{R}^1$ соответственно. Минимизируя после этого правую часть (1.3.6) по всем функциям $\mathcal{R}(\chi)$ указанного вида, мы придем к величине, зависящей только от геометрии конденсатора и значений $f(x)$ на множествах P и Q. Однако функционал, который необходимо минимизировать в этом случае, имеет довольно сложное строение. Поэтому все известные нам применения неравенства (1.3.6) основываются на эмпирическом подборе функции $\mathcal{R}(\chi)$, и выбору той или иной функции $\mathcal{R}(\chi)$ не всегда можно дать простую мотивировку. Впрочем, это является общим недостатком модульной техники.*

Было бы желательно указать точное значение описанного выше функционала хотя бы в некоторых случаях.

Доказательство теоремы 1.3.1. Предположим сначала, что Δ – строго внутренняя, ограниченная подобласть D с кусочно-гладкой границей. Зададим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\,dt$$

и воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_\Delta \sum_{i=1}^n \Phi_{x_i} A_i(x, \nabla f)\,dx + \int\limits_\Delta \Phi\,\mathcal{L}[f]\,dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Delta} \Phi \sum_{i=1}^n A_i(x,\nabla f)\,\cos(\overline{n}, x_i)\,\mathcal{H}^{n-1}(dx)\,,$$

где $(\overline{n}, x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – угол между единичным вектором $\overline{n}$ внешней нормали к $\partial\Delta$ и осью Ox_i.

Отсюда получаем

$$\int\limits_\Delta \mathcal{R}^2(x, f(x)) \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x,\nabla f)\,dx \le \int\limits_{\partial\Delta} |\Phi(x)|\,|A(x,\nabla f)|\,\mathcal{H}^{n-1}(dx) -$$

$$-\int\limits_{\Delta} \mathcal{L}[f(x)]\,dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\,dt - 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta} A_i(x,\nabla f)\,dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}\mathcal{R}'_{x_i}(x,t)\,dt\,.$$

Пользуясь условиями (1.3.1), (1.3.2), приходим к неравенству

$$\nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x,f(x))\sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dx \le \nu_2 \int\limits_{\partial\Delta} |\Phi(x)|\,\mathcal{H}^{n-1}(dx) +$$

$$+\nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x,f(x)) \frac{dx}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \int\limits_{\Delta} \mathcal{L}[f(x)]\,dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\,dt -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta} A_i(x,\nabla f)\,dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}\mathcal{R}'_{x_i}(x,t)\,dt\,. \tag{1.3.8}$$

Для контурного интеграла имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta} |\Phi(x)|\,\mathcal{H}^{n-1}(dx) = \int\limits_{\partial\Delta} \mathcal{H}^{n-1}(dx) \left| \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\,dt \right| =$$

$$= \int\limits_{(\partial\Delta,f)} \mathcal{R}^2(\chi)\,\mathcal{H}^n(d\chi)\,. \tag{1.3.9}$$

Далее заметим, что

$$\int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x,f(x))\,dx = 2\int\limits_{\Delta} dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}(x,t)\mathcal{R}'_{x_{n+1}}(x,t)\,dt + \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x,0)\,dx\,.$$

Поэтому

$$-2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta} A_i(x,\nabla f)\,dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}\mathcal{R}'_{x_i}(x,t)\,dt +$$

$$+\nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x))\, dx = \nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0)\, dx + 2 \int\limits_{\Delta} b(x)\, dx\,, \tag{1.3.10}$$

где

$$b(x) = \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R} \left(\nu_2\, \mathcal{R}'_{x_{n+1}}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x, \nabla f)\, \mathcal{R}'_{x_i}(x,t) \right) dt\,.$$

В силу неравенства Коши имеем

$$\left(\nu_1 \mathcal{R}'_{x_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} A_i \mathcal{R}'_{x_i} \right)^2 \leq (\nu_1^2 + |A(x, \nabla f)|^2) \sum_{i=1}^{n+1} \left(\mathcal{R}'_{x_i} \right)^2\,,$$

и из условия (1.3.2) на оператор $\mathcal{L}$ вытекает, что

$$\left(\nu_1 \mathcal{R}'_{x_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} A_i \mathcal{R}'_{x_i} \right)^2 \leq (\nu_1^2 + \nu_2^2)\, |\nabla \mathcal{R}(\chi)|^2\,.$$

Таким образом, из (1.3.10) получаем

$$-2 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta} A_i(x, \nabla f)\, dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R} \mathcal{R}'_{x_i}(x,t)\, dt + \nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x))\, dx \leq$$

$$\leq \nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0)\, dx + 2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \int\limits_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)|\, d\chi\,. \tag{1.3.11}$$

Объединяя неравенства (1.3.8), (1.3.9) и (1.3.11), приходим к неравенству

$$\nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx \leq 2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \int\limits_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi)\, |\nabla \mathcal{R}(\chi)|\, d\chi -$$

$$- \int\limits_{\Delta} \mathcal{L}[f(x)]\, dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\, dt + \nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0)\, dx + \nu_2 \int\limits_{(\partial\Delta, f)} \mathcal{R}^2(\chi)\, \mathcal{H}^n(d\chi)\,.$$

Пусть теперь Δ – произвольная ограниченная подобласть области D. Аппроксимируя ее последовательностью строго внутренних, ограниченных областей Δ_m и пользуясь каждый раз данным неравенством, будем иметь

$$\nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx \le 2\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2} \int\limits_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi)\, |\nabla \mathcal{R}(\chi)|\, d\chi -$$

$$- \int\limits_{\Delta} \mathcal{L}[f(x)]\, dx \int\limits_{0}^{f(x)} \mathcal{R}^2(x,t)\, dt + \nu_1 \int\limits_{\Delta} \mathcal{R}^2(x,0)\, dx +$$

$$+ \liminf \int\limits_{(\partial\Delta_m, f)} \mathcal{R}^2(\chi)\, \mathcal{H}^n(d\chi)\,. \qquad (1.3.12)$$

Функция

$$\rho(x) = \frac{1}{d(\mathcal{R})} \mathcal{R}(x, f(x))$$

является допустимой в метрике

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} + f'_{x_i} f'_{x_j})\, dx_i\, dx_j \qquad (1.3.13)$$

для семейства дуг, соединяющих множества P и Q в Δ. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\int\limits_{\gamma} \mathcal{R}(x, f(x))\, ds_F = \int\limits_{\gamma} \mathcal{R}(\chi)\, |d\chi| \ge d(\mathcal{R})\,.$$

Необходимая оценка модуля конденсатора непосредственно вытекает теперь из неравенства (1.3.12). Теорема доказана. □

1.3.2 Решения неравенства $f\mathcal{L}[f] \ge 0$

Рассмотрим приложения теоремы 1.3.1 в конкретных оценках модуля конденсатора на поверхностях F, являющихся графиками решений дифференциального неравенства $f\,\mathcal{L}[f] \ge 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и, в частности, решений уравнения типа минимальной поверхности $\mathcal{L}[f] = 0$. Мы начнем с примера, в котором выбор функции $\mathcal{R}(\chi)$ наиболее прост.

Рассмотрим на F внутреннюю метрику

$$s_F(x, y) = \inf \int_\gamma ds_F\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ, соединяющим точки x и y в D. Закрепим точку $y \in D$ и обозначим через U_m множество точек $x \in D$, в которых $s_F(x, y) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Предположим, что

$$\sup_{x \in D} s_F(x, y) = \infty\,. \tag{1.3.14}$$

Последовательность $\{U_m\}$ образует цепь. Рассмотрим граничное множества ξ, порождаемое этой цепью.

Теорема 1.3.2 *Пусть f – функция класса C^2, заданная над областью конечного объема $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая условию*

$$\liminf \int_{\partial D_m} |f(x)|\, \mathcal{H}^{n-1}(dx) < \infty\,, \tag{1.3.15}$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям ограниченных областей D_m, $\overline{D}_m \subset D$, исчерпывающим область D.

Предположим, что дифференциальное выражение $\mathcal{L}[f]$ определенно соотношением (1.3.3) *и удовлетворяет условиям* (1.3.1), (1.3.2). *Тогда если всюду в D выполнено*

$$f(x)\, \mathcal{L}[f(x)] \geq 0\,, \tag{1.3.16}$$

то граничное множество ξ имеет 2*-параболический тип.*

Доказательство. Зафиксируем строго внутреннюю подобласть $Q \subset D$, содержащую точку $y \in D$ и рассмотрим конденсатор $(\overline{Q}, \overline{U}_m; D)$. Если имеет место соотношение (1.3.14), то данные конденсаторы определены, по крайней мере, при достаточно больших m.

Воспользуемся теоремой 1.3.1. Положим $\mathcal{R}(\chi) \equiv 1$. В силу неравенства (1.3.6) на основании условия (1.3.16) имеем

$$\operatorname{mod}_{2,F}(\overline{Q}, \overline{U}_m; D) \leq \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} \liminf \int_{(\partial D_m, f)} \mathcal{H}^n(d\chi) + \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} |D|$$

(здесь $|D|$ – объем D). Отсюда

$$\operatorname{mod}_{2,F}(\overline{Q},\overline{U}_m;D)\le\frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})}\liminf\int\limits_{\partial D_m}|f(x)|\,\mathcal{H}^{n-1}(dx)+$$
$$+\frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})}|D|\,. \qquad (1.3.17)$$

Замечая, что

$$d(\mathcal{R})=\inf\int\limits_{\gamma}ds_F\,,$$

где инфимум берется по всем дугам $\gamma\subset D$, соединяющим множества Q и U_m, получаем

$$d(\mathcal{R})\ge m-c\,, \qquad (1.3.18)$$

где c – некоторая постоянная, зависящая от $\sup_{x,y\in Q}s_F(x,y)$.

Сопоставляя (1.3.15), (1.3.17), (1.3.18) и пользуясь теоремой 1.1.1 и леммой 1.1.3, легко приходим к нужному заключению. $\square$

Предположим теперь, что поверхность F задана над ограниченной областью $D\subset\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей. Обозначим через U_m множества, на которых $|f(x)|>m$ $(m=1,2,\ldots)$. Если функция $f(x)$ неограничена, то последовательность $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ образует цепь. Положим $\xi\asymp\{U_m\}$.

Теорема 1.3.3 *Если $f(x)\in C^2(D)$ и в области D выполнено*

$$f(x)\,\mathcal{L}[f(x)]\ge 0\,,$$

то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип в метрике поверхности F.

Следующий простой иллюстрирующий пример показывает, что граничное множества ξ может располагаться на поверхности F над подмножествами границы области D, не имеющими емкости нуль в евклидовой метрике $ds^2=|dx|^2$.

Пример 1.3.1 Рассмотрим поверхность Шерка

$$f(x_1,x_2)=\ln\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\,,$$

заданную над квадратом $-\pi/2 < x_i < \pi/2$ $(i = 1, 2)$. Данная поверхность минимальна, и функция $f(x_1, x_2)$ заведомо удовлетворяет неравенству $f(x)\mathcal{L}[f(x)] \geq 0$.

Цепь $\{U_m\}$ располагается в данном случае над всей границей квадрата, за исключением его вершин. Нетривиальная часть границы поверхности F сосредоточена здесь над вершинами квадрата.

$\square$

Доказательство теоремы 1.3.3. Зададим строго внутреннюю подобласть $Q \subset D$ и оценим модуль конденсатора $(\overline{Q}, \overline{U}_m; D)$. Воспользуемся теоремой 1.3.1. Положим

$$\mathcal{R}(\chi) = (1 + x_{n+1}^2)^{-1/2}.$$

Так как $|d\chi| \geq |dx_{n+1}|$, то

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf \int\limits_{\gamma} \frac{|df(x)|}{\sqrt{1 + |f(x)|^2}},$$

где точная нижняя грань берется по всем дугам γ, соединяющим множества Q и U_m в D. Отсюда

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf \int\limits_{\gamma} |d \operatorname{arcsh} f(x)|$$

и

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf_{x \in Q, y \in U_m} |\operatorname{arcsh} f(x) - \operatorname{arcsh} f(y)|. \tag{1.3.19}$$

Оценим теперь каждый из интегралов в правой части (1.3.6). Имеем

$$\int\limits_{D \times \mathbb{R}^1} |\mathcal{R}(\chi)|\, |\nabla \mathcal{R}(\chi)|\, d\chi = \frac{1}{2} \int\limits_{D} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \leq c_1\, |D|, \tag{1.3.20}$$

где c_1 – абсолютная постоянная.

Далее замечаем, что

$$\int\limits_{D} \mathcal{R}^2(x, 0)\, dx = |D| < \infty \tag{1.3.21}$$

и

$$\int\limits_{\partial D\times\mathbb{R}^1} \mathcal{R}^2(\chi)\,\mathcal{H}^n(d\chi) = \int\limits_{\partial D} \mathcal{H}^{n-1}(dx) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi\,|\partial D| < \infty\,. \qquad (1.3.22)$$

Объединяя оценки (1.3.19) – (1.3.22) и пользуясь неравенством (1.3.6), получаем

$$\mathrm{mod}_{2,F}(\overline{Q},\overline{U}_m;D) \le c_2 \sup_{x\in Q, y\in U_m} |\mathrm{arcsh}\, f(x) - \mathrm{arcsh}\, f(y)|^{-2}\,,$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от m.

Неравенство показывает, что модуль конденсатора $(\overline{Q},\overline{U}_m;D)$ стремится к 0 при $m\to\infty$. На основании теоремы 1.1.1 и леммы 1.1.3 делаем нужное заключение. Теорема доказана. □

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – неограниченная область, содержащая начало координат $x=0$ и имеющая кусочно-гладкую границу ∂D. Зададим ограниченную подобласть Q, $\overline{Q}\subset D$, $0\in Q$. Обозначим через D_r компоненту связности множества $D\cap\{|x|<r\}$, содержащую Q. При достаточно больших $r>0$ множество D_r определено. Символом U_r будем обозначать множество $D\setminus\overline{D}_r$.

Последовательность открытых множеств $\{U_m\}$ образует цепь. Пусть ξ – граничное множество на поверхности F, определяемое этой цепью. Положим

$$d(x) = \inf \int\limits_{\gamma} |dx|\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ, лежащим в D и соединяющим точку $x\in D$ с началом координат.

Теорема 1.3.4 *Если $f\in C^2(D)$ и всюду в D выполнено*

$$f(x)\,\mathcal{L}[f(x)] \ge 0\,,$$

то

$$\mathrm{mod}_{F,2}(\overline{Q},\overline{U}_r;D) \le \qquad (1.3.23)$$

$$\le \frac{1}{\ln^2(1+\tilde{d}(r)/M)} \left(c \int\limits_{D_r\setminus Q} \frac{dx}{d^2(x)} + \pi\nu_1 \int\limits_{\partial(D_r\setminus Q)} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(dx)}{d(x)} \right)\,,$$

где

$$M = \max_{x \in \overline{Q}} \sqrt{d^2(x) + f^2(x)}\,,$$

$$c = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} + \nu_2$$

и $\tilde{d}(r)$ *– длина кратчайшей дуги в* D*, соединяющей множество* Q *с множеством* U_r*.*

В частности, если $f(x)\,\mathcal{L}[f(x)] \geq 0$ *в* D *и область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to\infty} \inf \frac{1}{\ln^2 \tilde{d}(r)} \left(\int\limits_{D_r \setminus Q} \frac{dx}{d^2(x)} + \int\limits_{\partial D_r} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(dx)}{d(x)} \right) = 0\,, \tag{1.3.24}$$

то граничное множество ξ *имеет* 2*-параболический тип.*

Задача 1.3.25 *Теорема 1.3.4 влечет* 2*-параболичности типа графика целого решения уравнения* $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$ *в предположениях (1.3.1) и (1.3.2) относительно оператора* $\mathcal{L}$*.*

Можно доказать 2*-параболичность типа графика целого решения при менее ограничительных условиях на оператор: существуют неубывающие на* $[0, +\infty)$ *функции* $\nu_i(t)$ $(i = 1, 2)$*, для которых*

$$\sqrt{1 + |\xi|^2} - \nu_1(|x|) \leq \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, A_i(x, \xi)\,, \quad |A(x, \xi)| \leq \nu_2(|x|)\,,$$

где

$$\lim \inf_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 R} \int\limits_1^R (\nu_1(\tau) + \nu_2(\tau)) \frac{d\tau}{\tau} = 0\,.$$

Представляет интерес нахождение менее ограничительных условий на дифференциальное выражение $\mathcal{L}$*, нежели вышеуказанные.*

Доказательство теоремы 1.3.4. Зададим произвольно $R > r$ и рассмотрим конденсатор $(\overline{Q}, \overline{V}_r; D_R)$, где $V_r = U_r \cap D_R$. Из определения модуля вытекает, что

$$\mathrm{mod}_{F,2}(\overline{Q}, \overline{U}_r; D) = \mathrm{mod}_{F,2}(\overline{Q}, \overline{V}_r; D_R)\,. \tag{1.3.26}$$

Для оценки модуля конденсатора $(\overline{Q}, \overline{V}_r; D_R)$ воспользуемся теоремой 1.3.1. Положим

$$\mathcal{R}(\chi) = (d^2(x) + x_{n+1}^2)^{-1/2}\,.$$

Легко видеть, что функция $d(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(D)$, а потому $\mathcal{R} \in \mathrm{Lip}\,(D \times \mathbb{R}^1)$. Так как граница ∂D кусочно-гладкая, то $d(x)$ может быть продолжена по непрерывности в $\overline{D}$ и функция $\mathcal{R}(\chi)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым теоремой 1.3.1.

Оценим каждый из интегралов в правой части соотношения (1.3.6). Для оценки первого из интегралов заметим сначала, что

$$|\nabla\mathcal{R}(\chi)|^2 = \frac{d^2|\nabla d|^2 + x_{n+1}^2}{(d^2(x) + x_{n+1}^2)^3}\,,$$

а так как $|\nabla d(x)| \le 1$, то

$$|\nabla\mathcal{R}(\chi)| \le \frac{1}{d^2(x) + x_{n+1}^2}\,.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{(D_R\setminus Q,f)} \mathcal{R}(\chi)\,|\nabla\mathcal{R}(\chi)|\,d\chi \le \int\limits_{(D_R\setminus Q,f)} \frac{d\chi}{(d^2(x) + x_{n+1}^2)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{D_R\setminus Q} dx \left| \int\limits_0^{f(x)} \frac{dt}{(d^2(x) + t^2)^{3/2}} \right| \le \int\limits_{D_R\setminus Q} \frac{dx}{d^2(x)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}}\,,$$

откуда получаем

$$\int\limits_{(D_R\setminus,Q,f)} \mathcal{R}(\chi)\,|\nabla\mathcal{R}(\chi)|\,d\chi \le \int\limits_{D_R\setminus Q} \frac{dx}{d^2(x)}\,. \tag{1.3.27}$$

Для второго из интегралов выполнено

$$\int\limits_{D_R\setminus Q} \mathcal{R}^2(x,0)\,dx = \int\limits_{D_R\setminus Q} \frac{dx}{d^2(x)}\,. \tag{1.3.28}$$

Найдем оценку для третьего интеграла. Прежде всего, легко видеть, что

$$\liminf \int\limits_{(\partial\Delta_m, f)} \mathcal{R}^2(\chi)\,\mathcal{H}^n(d\chi) \leq \int\limits_{\partial(D_R \setminus Q)\times\mathbb{R}^1} \mathcal{R}^2(\chi)\,\mathcal{H}^n(d\chi)\,,$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям областей $\Delta_m \subset D_R \setminus Q$, аппроксимирующим область $D_R \setminus Q$ изнутри. Отсюда получаем

$$\liminf \int\limits_{(\partial\Delta_m, f)} \mathcal{R}^2(\chi)\,\mathcal{H}^n(d\chi) = \int\limits_{\partial\Delta_m} \mathcal{H}^{n-1}(dx) \left| \int\limits_0^{f(x)} \frac{dt}{d^2(x)+t^2} \right| \leq$$

$$\leq \pi \int\limits_{\partial(D_R\setminus Q)} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(dx)}{d(x)}\,. \tag{1.3.29}$$

Нетрудно видеть, что

$$d(\mathcal{R}) \geq \ln\left(1 + \frac{\tilde{d}(r)}{M}\right)\,. \tag{1.3.30}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что из геометрических соображений понятно

$$|d\left(d^2(x)+f^2(x)\right)^{1/2}| \leq ds_F\,.$$

Далее, пусть $\gamma \in \Gamma$ – произвольная локально спрямляемая дуга. Зададим точки $a, b \in \gamma$ и для переменной точки $x \in \gamma$, лежащей между a и b, обозначим через $\widetilde{ax}$ часть γ, заключенную между a и x, через $s(x)$ – ее длину в метрике ds_F. Тогда из предыдущего неравенства следует

$$\sqrt{d^2(x)+f^2(x)} \leq s(x) + M(a)\,,$$

где $M(a) = \sqrt{d^2(a)+f^2(a)}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\widetilde{ab}} \frac{ds_F}{s(x)+M(a)} \leq \int\limits_{\gamma} \frac{ds_F}{\sqrt{d^2(x)+f^2(x)}}\,,$$

и мы получаем

$$\ln\left(1+\frac{s(b)}{M(a)}\right) \le \int\limits_{\gamma} \frac{ds_F}{\sqrt{d^2(x)+f^2(x)}}\,.$$

Учитывая произвол в выборе точек a и b, имеем (1.3.30).

Объединяя оценки (1.3.27) – (1.3.30) и пользуясь неравенством (1.3.6), приходим к соотношению

$$\mathrm{mod}_{F,2}(\overline{Q},\overline{V}_r;D_R) \le$$

$$\le \frac{1}{\ln^2(1+\tilde{d}(r)/M)}\left(c\int\limits_{D_r\setminus Q}\frac{dx}{d^2(x)}+\pi\nu_1\int\limits_{\partial(D_r\setminus Q)}\frac{\mathcal{H}^{n-1}(dx)}{d(x)}\right)\,.$$

Учитывая произвол в выборе $R \ge r$, на основании равенства (1.3.26) получаем нужное. Теорема доказана. □

Комментарии. Утверждение о параболичности конформного типа минимальной поверхности, заданной над $\mathbb{R}^2$ уравнением $x_3 = f(x_1,x_2)$, можно найти, например, в [220, стр. 131]. На важность такого рода высказываний в теории нелинейных уравнений с частными производными впервые внимание, по-видимому, было обращено Р. Финном в работе [153], где утверждение о параболичности конформного типа поверхности выделено в качестве самостоятельной теоремы, несущей основную нагрузку в построениях.

Если D – область в $\mathbb{R}^2$, то, как легко видеть, условие (1.3.24) может быть переписано в виде

$$\liminf \frac{1}{\ln^2\tilde{d}(r)}\int\limits_{\partial D_r}\frac{\mathcal{H}^{n-1}(dx)}{d(x)} = 0\,, \tag{1.3.31}$$

что является требованием на "извилистость" границы D в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^2$. Является ли данное требование (или похожее) действительно необходимым — не ясно. Некоторые косвенные соображения позволяют предположить, что условие (1.3.31) необходимо, однако соответствующих примеров у нас не имеется.

При $n \ge 3$ соотношение (1.3.31) выполнено только в случае, когда область $D \subset \mathbb{R}^n$ является достаточно "узкой" в окрестности бесконечно удаленной точки, например, когда она лежит в области вида $\Delta \times \mathbb{R}^2$, где Δ – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-2}$.

Было бы желательно указать более тонкие нежели (1.3.24) условия, гарантирующие параболичность граничного множества ξ в теореме 1.3.4.

1.3.3 Минимальная поверхность над полосой

Отметим случай, в котором емкость конденсатора на минимальной поверхности можно подсчитать точно, не прибегая к модульной технике [75]. Пусть

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a, \;\; 0 < x_2 < b\}, \quad 0 < a, b < \infty,$$

— прямоугольник, и пусть $f(x)$ есть $C^2(\overline{D})$-решение уравнения

$$\mathcal{L}_0[f(x)] = 0$$

где дифференциальное выражение $\mathcal{L}_0$ определено соотношением (1.3.4). Предположим, что решение $f(x)$ удовлетворяет одному из условий:

(i) $f(x_1, 0) = u_1$, $f(x_1, b) = u_2$ ($u_i = \text{const}$);

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, b) = 0$.

Выберем постоянные c_1, c_2 так, чтобы было $0 < c_1 < c_2 < a$, и обозначим через Q_1 множество $\{x = (x_1, x_2) \in D : x_1 < c_1\}$, через Q_2 – множество $\{x = (x_1, x_2) \in D : x_1 > c_2\}$. Вычислим емкость конденсатора $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2; D)$ в метрике поверхности F, описываемоей уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$.

Теорема 1.3.5 *Существует постоянная $\mathcal{I} > 0$, зависящая только от поверхности F и такая, что при любых c_1, c_2 выполнено*

$$\operatorname{cap}_{F,2}(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2; D) = \frac{\mathcal{I}}{c_2 - c_1}. \tag{1.3.32}$$

Доказательство. Для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности F мы имеем

$$g_{11} = 1 + p^2, \quad g_{12} = g_{21} = pq, \quad g_{22} = 1 + q^2, \quad g = w^2,$$

где
$$p=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\quad q=\frac{\partial f}{\partial x_2}\,,\quad w=\sqrt{1+p^2+q^2}\,.$$
Отсюда получаем
$$g^{11}=\frac{1+q^2}{w^2}\,,\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{pq}{w^2}\,,\quad g^{22}=\frac{1+p^2}{w^2}\,.$$
и
$$\operatorname{cap}_{2,F}(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2;D)=\inf_{\varphi}\int\limits_D\left(\frac{1+q^2}{w}\varphi^2_{x_1}-2\frac{pq}{w}\varphi_{x_1}\varphi_{x_2}+\frac{1+p^2}{w}\varphi^2_{x_2}\right)dx_1dx_2\,.$$

Выберем функцию $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x)=0$ на Q_1, $\varphi(x)=1$ на Q_2; при всех остальных значениях $x\in D$ полагаем
$$\varphi(x)=\frac{x_1-c_1}{c_2-c_1}\,.$$
Имеем
$$\operatorname{cap}_{F,2}(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2;D)\le\frac{1}{(c_2-c_1)^2}\int\limits_{D_1}\frac{1+q^2}{w}\,dx_1dx_2\,, \tag{1.3.33}$$
где $D_1=D\setminus(\overline{Q}_1\cup\overline{Q}_2)$.

Для оценки интеграла в правой части (1.3.33) воспользуемся следующей хорошо известной формой уравнения минимальных поверхностей
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+q^2}{w}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{pq}{w}\right)=0\,.$$
На основании формулы Грина будем иметь
$$\int\limits_{D_1}\frac{1+q^2}{w}\,dx_1dx_2=\int\limits_{\partial D_1}x_1\left(-\frac{pq}{w}\,dx_1+\frac{1+q^2}{w}\,dx_2\right)\,.$$
В силу условий, накладываемых на граничные данные решения $f(x)$, интегралы по горизонтальным частям границы ∂D_1 исчезают, а потому
$$\int\limits_{D_1}\frac{1+q^2}{w}\,dx_1dx_2=c_2\int\limits_0^b\frac{1+q_2^2}{w_2}\,dx_2-c_1\int\limits_0^b\frac{1+q_1^2}{w_1}\,dx_2\,,$$

где обозначено

$$q_i = q(c_i, x_2)\,, \quad w_i = w(c_i, x_2)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Из этих же соображений следует, что интеграл

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^b \frac{1 + q^2(t, x_2)}{w(t, x_2)}\, dx_2$$

не зависит от переменной t и является постоянной величиной для данной поверхности. Таким образом, мы получаем

$$\int\limits_{D_1} \frac{1 + q^2}{w}\, dx_1 dx_2 = (c_2 - c_1)\,\mathcal{I}\,.$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x)$ является гармонической в метрике поверхности F, а потому доставляет равенство в (1.3.33). Тем самым, приходим к (1.3.32). Теорема доказана. $\square$

1.3.4 Графики в пространстве Минковского

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_1$ – пространство-время Минковского, т.е. $(n+1)$-мерное псевдоевклидово пространство с метрикой сигнатуры $(n, 1)$. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка или вектор в $\mathbb{R}^n$, $\chi = (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}_1$. Для произвольной пары векторов $\chi' = (x', t')$ и $\chi'' = (x'', t'')$ в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ определим *скалярное произведение*

$$\langle \chi', \chi'' \rangle = \sum_{i=1}^{n} x'_i x''_i - t' t''$$

и *скалярный квадрат* вектора χ

$$|\chi|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - t^2\,.$$

Если $|\chi|^2 > 0$, то вектор $\chi \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ называется *пространственноподобным.*

Гиперповерхность F класса C^1 в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ *пространственноподобна*, если пространственноподобен каждый касательный к ней вектор. Если F пространственноподобна, то она локально представима в виде графика C^1-функции $t = f(x)$. Ниже мы будем предполагать, что такое представление поверхности имеет место "в целом".

График C^1-функции $t = f(x)$, заданной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, пространственноподобен тогда и только тогда, когда $|\nabla f(x)| < 1$ всюду в области D.

Основные понятия и факты теории поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{n+1}_1$ можно найти в [28], [46].

Пусть F – график функции $t = f(x)$ класса C^1, определенной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что поверхность $F \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ пространственноподобна. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ индуцирует на F метрику

$$ds_F^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j\,, \quad g_{ij} = \delta_{ij} - f'_{x_i} f'_{x_j}\,, \quad i,j = 1,2,\ldots,n\,, \tag{1.3.34}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В силу условия пространственноподобности F метрика (1.3.34) положительно определена всюду в области D. Элементы обратной матрицы $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ записываются в виде

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \frac{f'_{x_i} f'_{x_j}}{1 - |\nabla f|^2}\,, \quad i,j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Нашей ближайшей целью является интерпретация некоторых специальных случаев признаков 2-параболичности и 2-гиперболичности типа граничного множества поверхности F, полученных в разделе 1.2.4. Предположим сначала, что граничное множество ξ поверхности F исчерпывается некоторой функцией $h(x) : D \to (a, +\infty)$ со свойством $|\nabla h(x)| \equiv 1$ в D, например, одной из функций вида

$$h(x) = \left(\sum_{i=1}^{l} x_i^2\right)^{1/2}, \quad 1 \le l \le n\,. \tag{1.3.35}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_F(\nabla h) &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{ij}+\frac{f'_{x_i}f'_{x_j}}{1-|\nabla f|^2}\right) h'_{x_i}h'_{x_j} = \\ &= |\nabla h|^2+\frac{\langle\nabla f,\nabla h\rangle^2}{1-|\nabla f|^2} = |\nabla h|^2\frac{1-|\nabla_\omega f|^2}{1-|\nabla f|^2}\,,\end{aligned}$$

где символом $\nabla_\omega f$ обозначен градиент сужения функции f на поверхность уровня $\Sigma_h(t)=\{x\in D : h(x)=t\}$ функции $h(x)$ и

$$|\nabla f|^2 = \langle\nabla f,\nabla h\rangle^2+|\nabla_\omega f|^2\,.$$

Тем самым в случае $k(x)\equiv\sqrt{\det\,(g_{ij})}$ и $p=2$ находим

$$\lambda_h(t)=\int\limits_{\Sigma_h(t)}\frac{1-|\nabla_\omega|^2}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,\mathcal{H}^{n-1}(dx)\,. \tag{1.3.36}$$

Зафиксируем постоянную $a\geq 0$. Предположим, что поверхность F задана над "угловой" областью $D=D(a,+\infty;\Delta)$, описанного в разделе 1.2.4 вида. Пусть ξ – граничное множество на F, задаваемое цепью областей

$$U_m=\{x\in D : \tau_m<|x|<+\infty\}\,,\quad \lim\tau_m=+\infty\,.$$

В качестве функции исчерпания ξ выберем функцию $h(x)$, определенную равенством (1.3.35) с $l=n$.

Имеет место

Теорема 1.3.6 *Пусть F – пространственноподобная поверхность, заданная над "угловой" областью $D=D(a,+\infty;\Delta)$. Справедливы высказывания:*

(*i*) *если поверхность F удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty} r^{1-n}\left(\int\limits_{D\cap\{|x|=r\}}\frac{1-|\nabla_\omega f|^2}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}(r,\omega)\,\mathcal{H}^{n-1}(d\omega)\right)^{-1}=+\infty\,, \tag{1.3.37}$$

где ∇_ω *– градиент сужения* f *на сферу* $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ *и* $\mathcal{H}^{n-1}(d\omega)$ *– элемент площади на сфере единичного радиуса, то граничное множество* ξ *имеет* 2*-параболический тип;*

(ii) *если существует измеримое множество* $E \subset \Delta$, $\mathcal{H}^{n-1}(E) > 0$, *такое, что для любого* $\omega \in E$ *выполнено*

$$\int^{+\infty} \frac{1 - f_r'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(r, \omega)\, \frac{dr}{r^{n-1}} < +\infty\,, \tag{1.3.38}$$

где $f_r' = \langle \nabla f, x|x|^{-1}\rangle$, *то граничное множество* ξ *имеет* 2*-гиперболический тип.*

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения достаточно воспользоваться соотношениями (1.2.1) и (1.3.36) с функцией исчерпания $h(x) = |x|$.

Чтобы доказать вторую часть, необходимо применить теорему 1.2.4, предварительно заметив, что

$$\begin{aligned} \delta(r, \omega) \;&= \left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - f'_{x_i} f'_{x_j})\, dx_i dx_j\right)^{1/2}\right|_{l_\omega} = \\ &= (|dx|^2 - \langle \nabla f, dx\rangle^2)^{1/2}\big|_{l_\omega} = (1 - f_r'^2)^{1/2}\, dr\,. \end{aligned}$$

$\square$

Для радиально симметрических поверхностей выполнено $\nabla_\omega f \equiv 0$, и на основании (1.3.37), (1.3.38) приходим к утверждению.

Следствие 1.3.1 *Пусть* F *– пространственноподобная поверхность в* $\mathbb{R}^{n+1}_1$, *определенная над всем пространством* $\mathbb{R}^n$ *посредством графика* C^1*-функции* $t = f(|x|)$. *Тогда:*

(i) *если* $n \geq 3$, *то* F *имеет* 2*-гиперболический тип;*

(ii) если $n = 2$, то F имеет 2-гиперболический тип тогда и только тогда, когда

$$\int^{+\infty} \sqrt{1 - f_r'^2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau} = +\infty\,.$$

Рассмотрим случай "цилиндрических" областей. Пусть Δ – ограниченная область в гиперплоскости $x_1 = 0$, и пусть

$$D(a, +\infty; \Delta) = \Delta \times (a, +\infty)$$

– цилиндрическая область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что F – пространственноподобная поверхность, заданная над $D(a, +\infty; \Delta)$ посредством функции $t = f(x)$ класса C^1-. Следуя обозначениям раздела 1.2.4, для фиксированной точки $'x = (x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \Delta$ полагаем

$$\delta(\tau,' x)\, d\tau = (1 - f_{x_1}'^2(\tau,' x))^{1/2}\, d\tau\,.$$

Выберем функцию исчерпания (1.3.35) с $l = 1$. Определим граничное множество ξ поверхности F цепью областей

$$U_m = \{x = (x_1,' x) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \tau_m\}\,, \quad \lim \tau_m = +\infty\,.$$

Непосредственными следствиями теорем 1.2.1 и 1.2.5 является

Теорема 1.3.7 *Пусть F – пространственноподобная поверхность над D. Тогда:*

(i) если

$$\int^{\infty} d\tau \left(\int\limits_{\Delta\cap\{x_1=\tau\}} \frac{1 - |\nabla_{'x} f|^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(\tau,' x)\, \mathcal{H}^{n-1}(d'x) \right)^{-1} = +\infty\,,$$

то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип;

(ii) если существует измеримое множество $E \subset \Delta$, $\mathcal{H}^{n-1}(E) > 0$, такое, что для всех $'x \in E$ выполнено

$$\int^{+\infty} \frac{1 - f_{x_1}'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(\tau,' x)\, d\tau < +\infty\,,$$

то граничное множество ξ имеет 2-гиперболический тип.

Следствие 1.3.2 *Пусть $D = \Delta \times (a, +\infty)$ – цилиндрическая область, и пусть F – график C^1-функции вида $t = f(x_1)$. Пространственноподобная поверхность F имеет 2-параболический тип тогда и только тогда, когда*

$$\int^{+\infty} \sqrt{1 - f'^2(\tau)}\, d\tau = +\infty\,.$$

Укажем применения найденных результатов к проблеме типа пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ постоянной средней кривизны H. Пусть $t = f(x)$ – решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f(x)|^2}} \right) = 2H\,, \quad H \equiv \mathrm{const}\,, \tag{1.3.39}$$

определенное во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Относительно условий существования решений уравнения (1.3.39) над неограниченными подобластями $\mathbb{R}^2$ см. [124], [237], [194].

Согласно [133] поверхность F как график функции $t = f(x)$ в $\mathbb{R}^3$ является выпуклой. Следуя [237], [134], определим *асимптотические граничные значения* f, полагая

$$\Lambda_f(\omega) = \lim_{r \to +\infty} \left(f(r, \omega) - r \right)\,.$$

Величина $\Lambda_f(\omega)$ существует (либо равна $-\infty$) при всяком $\omega \in S^1(0,1)$.

Пример 1.3.2 Простейший пример целого решения уравнения постоянной средней кривизны H в $\mathbb{R}^{n+1}_1$ доставляет гиперболический цилиндр

$$t = \sqrt{\frac{1}{n^2\, H^2} + x_n^2}\,.$$

Легко видеть, что для этой поверхности $\Lambda_f(\omega) = 0$ вдоль положительного и отрицательного направлений оси Ox_n и $\lambda_f(\omega) = -\infty$ вдоль всех других направлений $\omega \in S^{n-1}(0,1)$.

Воспользуемся теоремой 1.3.6. Выражение (1.3.36) имеет вид

$$\lambda_h(t) = t^{n-1} \int\limits_{|x|=t} \left(\sqrt{1 - |\nabla f|^2} + \frac{f'^2_r}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) (t, \omega)\, d\omega\,.$$

Легко подсчитать, что

$$\sqrt{1-|\nabla f|^2}+\frac{f_r'^2}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}=\frac{c}{t}+c_1\,,$$

где c, c_1 – постоянные.

В силу условия (1.3.37) при $n=2$ поверхность имеет 2-параболический тип. Условие (1.3.38) влечет 2-гиперболичность типа этой поверхности при $n\geq 3$.

$\square$

В общем случае имеет место

Теорема 1.3.8 *Пусть $f(x)$ – целое решение уравнения пространственноподобных поверхностей постоянной средней кривизны в пространстве Минковского $\mathbb{R}^3_1$. Тогда если существует измеримое множество $E\subset S^1(0,1)$, $\mathcal{H}^1(E)>0$, такое, что при всех $\omega\in E$ выполнено*

$$\Lambda_f(\omega)>-\infty\,, \tag{1.3.40}$$

то график F имеет 2-гиперболический тип.

Доказательство опирается на следующую априорную оценку градиента целого решения уравнения (1.3.39):

$$1-|\nabla f(x)|^2\equiv\frac{1}{g^2}\geq\frac{1}{(1+2H\,|x|)^2}\,, \tag{1.3.41}$$

справедливую при всех $x\in\mathbb{R}^2$. Приводимое ниже доказательство данного неравенства выполнено по нашей просьбе А.А. Клячиным.

Хорошо известны следующие свойства решений уравнения (1.3.39).

a) Длина $|B|=\sum\limits_{ij}h_{ij}^2$ второй фундаментальной формы с коэффициентами h_{ij} поверхности F ограничена [128], [133]; именно, справедливы неравенства

$$nH^2\leq|B|\leq n^2H^2. \tag{1.3.42}$$

b) Если $H>0$, то F – выпуклая поверхность [133], [237].

c) Пусть $T = (0, ..., 0, 1)$ – временной вектор, $X = (x, f(x))$ – радиус-вектор поверхности F, а ν – единичный вектор нормали к F. Положим

$$f = -\langle X, T\rangle, \qquad g = -\langle \nu, T\rangle\,.$$

Справедливы соотношения [136]:

$$|df|^2 = g^2 - 1\,, \tag{1.3.43}$$

$$|dg|^2 = \sum\Big(\sum h_{ik}\langle \mathbf{e_k}, T\rangle\Big)^2 \le |B|\,(g^2-1)\,. \tag{1.3.44}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\nabla f(0) = 0$. Этого можно добиться с помощью лоренцева преобразования, которое переводит касательную плоскость в точке $(0, f(0))$ в плоскость $x_{n+1} = 0$. Отметим также, что во всех точках, в которых $df(x) = 0$, функция f принимает одинаковые значения. Это – прямое следствие выпуклости F.

Из соотношений (1.3.43), (1.3.44) и (1.3.42), получаем

$$|dg|^2 \le |B|\,(g^2-1) = |B|\,|df|^2 \le n^2H^2|df|^2\,,$$

или

$$|dg| \le n\,H\,|df|\,.$$

Пусть теперь $\overline{x} \ne 0$ и $\nabla f(\overline{x}) \ne 0$. Двигаясь вдоль кривой

$$\dot{x}(s) = -\nabla u(x(s)), \quad x(0) = \overline{x},$$

мы достигнем точки $s = s_1$, в которой $\nabla u(x(s_1)) = 0$. Обозначим через $\gamma(s) = (x(s), u(x(s)))$. Тогда

$$g(x) - g(x(s_1)) = -\int\limits_0^{s_1}\langle dg, \frac{\dot\gamma(s)}{|\dot\gamma(s)|}\rangle ds \le \int\limits_0^{s_1}|dg|ds \le$$

$$\le nH\int\limits_0^{s_1}|df|ds = -nH\int\limits_0^{s_1}\langle df, \dot\gamma(s)\rangle\,ds = nH(f(\overline{x}) - f(x(s_1))).$$

И так как $g(x(s_1)) = 1/\sqrt{1 - |\nabla f(x(s_1))|^2} = 1$ и $f(x(s_1)) = f(0)$, то

$$g(\overline{x}) \le 1 + nH(f(\overline{x}) - f(0)) \le 1 + nH|\overline{x}|.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1-|\nabla f(x)|^2} \geq \frac{1}{1+nH|x|}\,,$$

и соотношение (1.3.41) действительно имеет место.

Так как график F является выпуклым вниз и $\nabla f(0)=0$, то

$$1 > f'_r(r,\omega) \geq 0\,.$$

Пусть $\omega \in E$ – точка, в которой выполнено свойство (1.3.40). Воспользуемся условием 2-гиперболичности (1.3.38). В силу (1.3.41) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-f_r'^2}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}(r,\omega)\frac{dr}{r} \leq \int\limits_1^{+\infty}(1-f_r'^2(r,\omega))\sqrt{1+2H\,r^2}\,\frac{dr}{r} \leq$$

$$\leq C\int\limits_1^{+\infty}(1-f_r'^2(r,\omega))\,dr \leq C\int\limits_1^{+\infty}(1-f_r'(r,\omega))\,dr =$$

$$= C\lim_{r\to+\infty}(r-f(r,\omega)) = -C\,\Lambda_f(\Omega), \quad C\equiv \mathrm{const}\,.$$

Условие (1.3.40) гарантирует выполнение (1.3.38) и, тем самым, гиперболичность графика функции $f(x)$. □

Замечания. Одной из причин неослабевающего интереса к поверхностям постоянной средней кривизны в пространстве Минковского является их связь с гармоническими отображениями. В частности, при $n=2$ гауссово отображение поверхности F нулевой средней кривизны есть гармоническое отображение F в гиперболическое пространство $\mathbf{H}^2$. Поиск простых способов проверки на параболичность либо гиперболичность типа полной пространственноподобной поверхности F — важная составная часть общей программы построения примеров гармонических отображений в гиперболическое пространство [137], [163].

В работах [237], [134], [135], [136] гиперболичность типа F была установлена в предположении, что функция $\Lambda_f(\omega) > -\infty$ на некотором интервале $I \subset S^1(0,1)$ и удовлетворяет на I условию Липшица. Теорема 1.3.8, полученная в [78], существенно усиливает данный признак.

Несомненный интерес представляют признаки параболичности и гиперболичности типа максимальных поверхностей произвольной коразмерности в $\mathbb{R}^{n+1}_k$, $1 \le k \le n$. Некоторые результаты в этом и близких направлениях см. в [77], [49] – [50], [46, разделы 2.8 и 6.1].

Глава 2

Внешние дифференциальные формы

Цель настоящей главы — изучение связей между отображениями с ограниченным искажением и дифференциальными формами. Вводятся четыре класса дифференциальных форм и приводятся примеры дифференциальных форм, принадлежащих введенным классам и естественным образом связанных с отображениями с ограниченным искажением.

2.1 Базовые понятия

Напомним некоторые важнейшие понятия. Мы будем пользоваться терминологией [98], [29, глава 3], [64, глава II].

2.1.1 Формы на евклидовом пространстве

Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через $\overline{A}$ замыкание множества $A \subset X$, через $\mathrm{int}A$ – множество внутренних точек A и через $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}A$ – границу A.

Символом $\mathbb{R}$ мы обозначаем, как обычно, множество вещественных чисел, символом $\mathbb{R}^n$ – векторное пространство, состоящее из элементов вида $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ введены стандартное скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

и норма

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Норма линейного отображения $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ определена выражением

$$|L| = \max_{|x|=1} |Lx|\,. \tag{2.1.1}$$

Для произвольной $m \times n$ матрицы A мы полагаем

$$|A| = \Big(\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}^2\Big)^{1/2}. \tag{2.1.2}$$

Пусть

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

– n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$, и пусть

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

– его граница.

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и всякого α, $0 \le \alpha \le n$, символом $\mathcal{H}^\alpha(E)$ обозначается α-мерная мера Хаусдорфа E.

Мы используем также обозначение

$$\omega_{n-1} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} = \mathcal{H}^{n-1}(S(0,1)), \qquad S(0,1) \subset \mathbb{R}^n\,,$$

где Γ есть Γ-функция Эйлера [104, 6.1]. Для единичного шара $B(0, 1)$ в $\mathbb{R}^n$ мы имеем

$$\mathcal{H}^n(B(0,1)) = \frac{1}{n}\,\omega_{n-1}\,.$$

Двойственные пространства $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ и $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ k-векторов и k-форм (k-ковекторов) определены над евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ таким образом, что

$$\bigwedge\nolimits^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} = \bigwedge\nolimits_0(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\bigwedge\nolimits_k(\mathbb{R}^n) = \{0\} = \bigwedge\nolimits^k(\mathbb{R}^n)$$

в случаях $k > n$ или $k < 0$. Прямые суммы

$$\bigwedge_*(\mathbb{R}^n) = \oplus_k \bigwedge_k(\mathbb{R}^n), \quad \bigwedge^*(\mathbf{R}^n) = \oplus_k \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$$

генерируют контравариантные и ковариантные грассмановы алгебры на $\mathbb{R}^n$ с оператором внешнего умножения $\wedge$.

Пусть $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ – ковектор. Обозначим через $\Lambda(k,n)$ множество упорядоченных мультииндексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, состоящих из целых $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Форма ω может быть записана единственным образом в виде линейной комбинации

$$\omega = \sum_{I \in \Lambda(k,n)} \omega_I \, dx_I \, .$$

Здесь ω_I – коэффициенты ω в стандартном базисе пространства $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$:

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \quad I = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \Lambda(k,n) \, .$$

Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k)$ – мультииндекс из $\Lambda(k,n)$. Дополнение I^* мультииндекса I есть мультииндекс $I^* = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ из $\Lambda(n-k,n)$, где компоненты j_p суть из $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$. Мы имеем

$$dx_I \wedge dx_{I^*} = \sigma dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \, , \tag{2.1.3}$$

где $\sigma = \sigma(I)$ есть сигнатура перестановка $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что $\sigma(I^*) = (-1)^{k(n-k)}\sigma(I)$.

Пусть $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ – базисная форма из $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$*dx_I = \sigma(I) \, dx_{I^*} \, . \tag{2.1.4}$$

Если форма $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ – произвольна и

$$\omega = \sum_{I \in \Lambda(k,n)} \omega_I \, dx_I \, ,$$

то мы обозначаем

$$*\omega = \sum_{I \in \Lambda(k,n)} \omega_I * (dx_I) \tag{2.1.5}$$

и $*\omega$ принадлежит $\bigwedge^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Форма $*\omega$ называется *ортогональным дополнением* формы ω.

Если символом $\mathbb{1}$ обозначить функцию (0-форму), тождественно равную 1, то, очевидно,

$$*\mathbb{1} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

есть форма объема на $\mathbb{R}^n$.

Оператор $* : \bigwedge^*(\mathbb{R}^n) \to \bigwedge^*(\mathbb{R}^n)$, называемый *оператором Ходжа*, обладает следующими свойствами:

если $\alpha, \beta \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ и $a, b \in \mathbb{R}$, то

$$*(a\alpha + b\beta) = a * \alpha + b * \beta\,; \tag{2.1.6}$$

для каждой формы ω степени $\deg \omega = k$ мы имеем

$$*(*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\omega\,. \tag{2.1.7}$$

Введем следующее обозначение. Пусть ω – форма степени k. Положим

$$*^{-1}\omega = (-1)^{k(n-k)} * \omega\,. \tag{2.1.8}$$

Оператор $*^{-1}$ является обратным к $*$ в следующем смысле

$$*^{-1}(*\omega) = *(*^{-1}\omega) = \omega\,. \tag{2.1.9}$$

Свертка формы α и формы β определяется выражением

$$\alpha \vee \beta = *^{-1}(\alpha \wedge *\beta)\,. \tag{2.1.10}$$

Если $\deg \alpha = l$ и $\deg \beta = k$, то $\alpha \vee \beta = 0$ при $l > k$.

Внутреннее (скалярное) произведение форм α и β одинаковой степени есть величина

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \vee \beta = *^{-1}(\alpha \wedge *\beta) = *(\alpha \wedge *\beta)\,. \tag{2.1.11}$$

Скалярное произведение форм обладает обычными свойствами скалярного произведения. Мы полагаем

$$|\omega| = \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}\,.$$

Форма ω степени k называется простой, если существуют 1-формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что

$$\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k\,.$$

Отметим следующее свойство нормы: если $\alpha, \beta \in \bigwedge^*(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \leq |\alpha||\beta|\,,$$

если хотя бы одна из форм α, β является простой. Если α и β суть простые и ненулевые, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда подпространства, ассоциированные с α и β ортогональны.

Вообще, если $\deg\alpha = p$, $\deg\beta = q$, то

$$|\alpha \wedge \beta| \le (C^p_{p+q})^{1/2}|\alpha||\beta| \tag{2.1.12}$$

(см. [150, §1.7]).

2.1.2 Поливекторы

Линейный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\left(\bigwedge\nolimits_k(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}\right) \simeq \bigwedge\nolimits^k(\mathbb{R}^n)\,,$$

описывающий двойственность пространств $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ и $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$, ассоциирует k-вектор с формой.

Вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ определяет 1-форму

$$\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \ldots + a_ndx_n\,. \tag{2.1.13}$$

Обозначим ее символом Ωa.

Пусть $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $u_i \in \bigwedge_1(T_m)$, – невырожденные реперы. Множество всех k-мерных реперов, полученных из u посредством линейного преобразования с определителем, равным 1, отождествляется с k-мерной плоскостью $[u]$, натянутой на векторы $u_1, \ldots, u_k$, и идентифицируется как простой k-вектор. Этот *поливектор* мы будем обозначать тем же самым символом u, и говорить, что $[u]$ есть плоскость, ассоциированная с поливектором.

Можно доказать, что форма

$$\Omega u = \Omega u_1 \wedge \ldots \wedge \Omega u_k$$

не зависит от выбора репера из класса реперов, эквивалентных u. Этот факт есть следствие взаимной однозначности отображения $u \mapsto \Omega_u$ множества простых поливекторов на множество простых форм, и позволяет расширить определение операций раздела 2.1.1, сначала с множества простых форм грассмановой алгебры $\bigwedge^*$ на множество простых поливекторов $\bigwedge_*$ и, далее, на множество всей алгебры $\bigwedge^*$. Это дает полное описание изоморфизма $\Omega : \bigwedge_* \to \bigwedge^*$.

Полезно выяснить геометрический смысл поливекторов и операций на нем. Итак, если u есть простой k-вектор и $*u$ есть $(n-k)$-вектор, ортогональный ему, то каждый вектор k-мерной плоскости $[u]$ является ортогональным каждому из векторов в $(n-k)$-мерной плоскости, ассоциированной с $[*u]$.

Пусть u и v – два невырожденных простых k-вектора. Величина

$$\langle u, v\rangle = \Omega u \vee \Omega v = *^{-1}(\Omega u \wedge *\Omega v)$$

есть их скалярное произведение.

Пусть $u = v$. Величина $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ является мерой k-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы k-мерного репера, генерируемого u.

Если $l = \dim u \leq k = \dim v$, то свертка этих поливекторов

$$u \vee v = *^{-1}(\Omega u \wedge *\Omega v) \tag{2.1.14}$$

нетривиальна. Плоскость $[u \vee v]$ состоит в точности из тех же векторов $a \in [u]$, что ортогональны плоскости $[v]$.

Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ – произвольный репер, представляемый k-вектором v и пусть $v'_1, \ldots, v'_k$ – ортогональные проекции векторов

$$v_1, \ldots, v_k \quad \text{на плоскость } [u]\,.$$

Тогда

$$|u \vee v| = \mu|u|\,,$$

где μ есть объем k-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v'_1, \ldots, v'_k$.

2.1.3 Формы на римановых многообразиях

Пусть $V(\mathcal{M})$ – векторное слоение над $\mathcal{M}$. Предположим, что в каждом из его слоев задано евклидово скалярное произведение и что линейная связность на $V(\mathcal{M})$ сохраняет это скалярное произведение. В данном случае мы вправе говорить, что $V(\mathcal{M})$ является *римановым векторным расслоением* над $\mathcal{M}$.

Символами $\bigwedge^k(\mathcal{M})$ и $\bigwedge_k(\mathcal{M})$ обозначаются римановы векторные слоения со слоями $\bigwedge^k(T_m(\mathcal{M}))$ и $\bigwedge_k(T_m(\mathcal{M}))$. Сечения этих слоений суть поля k-ковекторов (k-форм) и k-векторов, которые мы обсудим в деталях.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в окрестности некоторой точки $m \in \mathcal{M}$. Квадрат элемента длины на $\mathcal{M}$ в терминах локальных координат $x_1, \ldots, x_n$ описывается следующим выражением

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_i \,.$$

Символом g^{ij} будем обозначать контравариантный тензор, определяемый равенством

$$(g^{ik})(g_{kj}) = (\delta^i_j), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где δ^j_i есть символ Кронекера.

Каждое из сечений расслоения $\bigwedge^k(\mathcal{M})$ (то есть дифференциальная форма) α может быть записана в терминах локальных координат x_1, $\ldots$, x_n в виде линейной комбинации

$$\alpha = \sum_{I \in \Lambda(k,n)} \alpha_I dx_I = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \,. \tag{2.1.15}$$

Ортогональное дополнение дифференциальной формы α на римановом многообразии $\mathcal{M}$ будем обозначать через $*\alpha$. Заметим, что дифференциальная форма $*\mathbb{1}$ является формой объема на $\mathcal{M}$ и, если, например, $\deg \alpha = 1$, то в (ортонормированной) системе локальных координат $x_1, \ldots, x_n$ в точке m имеем

$$*\alpha(m) = * \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(m) dx_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i(m) dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n \,,$$

где знак $\widehat{\ }$ означает, что соответствующее выражение под $\widehat{\ }$ пропускается.

Пусть α – дифференциальная форма, определенная на открытом множестве $D \subset \mathcal{M}$. Если $\mathcal{F}(D)$ – класс функций, заданных на D, то мы говорим, что форма α принадлежит классу $\mathcal{F}(D)$, если все $\alpha_I \in \mathcal{F}(D)$. Например, форма α есть класса $L^p(D)$ или $W^{1,p}(D)$, если все ее коэффициенты суть в этих классах. Пространство $L^p(D)$, оснащенное нормой

$$\|\alpha\|_{p,D} = \left(\int\limits_D |\alpha|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p} = \left(\int\limits_D \left(\sum_{I\in\Lambda(k,n)} |\alpha_I|^2\right)^{\frac{p}{2}} * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p},$$

является банаховым.

Пространство $L^p_1(D)$ состоит из всех дифференциальных форм α с полунормой

$$\|\alpha\|_{L^p_1(D)} = \left(\int\limits_D \left(\sum_{I\in\Lambda(k,n)} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial\alpha_I}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p}.$$

Пространство С.Л. Соболева $W^{1,p}(D)$, $1 \le p < \infty$, определяется соотношением

$$W^{1,p}(D) = L^p(D) \cap L^p_1(D)$$

с нормой

$$\|\alpha\|_{W^1_p(D)} = \|\alpha\|_{L^p(D)} + \|\alpha\|_{L^p_1(D)}\,.$$

Относительно проблемы аппроксимации формами с гладкими коэффициентами см. [228], [145], [67], [66] и цитированную там литературу.

Если α, $\deg\alpha = k$, $0 \le k \le n$, есть дифференциальная форма с коэффициентами класса $C^1(\mathcal{M})$, то $d\alpha$, $\deg(d\alpha) = k+1$, обозначает ее (внешний) дифференциал. (Внешнее) дифференцирование является линейной операцией. Действительно, если α_1, α_2 суть произвольные дифференциальные k-формы, определенные в области $U \subset \mathcal{M}$ и a, b – вещественные числа, то k-форма $a\alpha_1 + b\alpha_2$ также дифференцируема в U и

$$d(a\alpha_1 + b\alpha_2) = ad\alpha_1 + bd\alpha_2\,.$$

Имеет место следующее свойство: если α и β – произвольные дифференциальные формы, дифференцируемые в области $U \subset \mathcal{M}$, то внешнее произведение $\alpha \wedge \beta$ является дифференциальной формой, которая также дифференцируема в области U и

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta\,,$$

где k – степень формы α.

Для всякой C^2-формы ω имеем

$$dd\omega = d(d\omega) = 0.$$

Оператор $*$ и оператор дифференцирования d определяют некоторый оператор δ, называемый кодифференциалом, действующий на k-формах $(0 \le k \le n)$, по правилу

$$\delta\alpha = (-1)^k *^{-1} d * \alpha\,, \tag{2.1.16}$$

где α есть k-форма и, таким образом, $\delta\alpha$ является $(k-1)$-формой.

Отметим, что поскольку дифференциал от n-формы равен нулю, то же самое имеет место для кодифференциала от 0-формы. При этом, если для оператора d необходима только структура дифференцируемого многообразия, то в определении кодифференциала δ предполагается риманова структура. Мы имеем

$$\delta\delta = (-1)^{p-1}(-1)^p *^{-1} d * *^{-1} d* = - *^{-1} dd*,$$

что непосредственно влечет $\delta\delta = 0$.

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное ориентируемое компактное риманово многообразие (с возможно пустым) кусочно гладким краем $\partial\mathcal{M}$. Для всякой формы $\alpha \in C^1(\overline{\mathcal{M}})$, $\deg\alpha = n-1$, справедлива формула Стокса

$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}} \alpha = \int\limits_{\mathcal{M}} d\alpha\,.$$

Определение 2.1.1 *Дифференциальная форма α степени k на n-мерном ориентируемом римановом C^2-многообразии $\mathcal{M}$ с коэффициентами*

$$\alpha_I \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$$

называется слабо замкнутой, если для всякой дифференциальной формы β, $\deg\beta = k+1$, с непрерывными коэффициентами, имеющей компактный носитель

$$\operatorname{supp}\beta = \overline{\{m \in \mathcal{M} : \beta \ne 0\}} \subset \mathcal{M}, \quad \operatorname{supp}\beta \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset\,,$$

и такой, что

$$\beta \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}), \quad 1/p + 1/q = 1, \quad 1 \le p,\, q \le \infty\,,$$

выполняется

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha, \delta\beta \rangle * \mathbb{1} = 0\,. \qquad (2.1.17)$$

Здесь $*\mathbb{1}$ *– форма объема на* $\mathcal{M}$.

В случае гладкой формы α условие (2.1.17) вполне согласуется с традиционным условием замкнутости $d\alpha = 0$. Действительно, если формы $\alpha, \beta \in C^1(\mathcal{M})$, то мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge *\beta = \int\limits_{\mathcal{M}} d(\alpha \wedge *\beta) + (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha \wedge d * \beta\,.$$

Так как форма β имеет компактный носитель и многообразие $\mathcal{M}$ ориентируемо, то первый из интегралов в правой части по формуле Стокса обращается в нуль. Таким образом, находим

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge *\beta = (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha \wedge * *^{-1} d * \beta = \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha \wedge *\delta\beta = \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha, \delta\beta \rangle * \mathbb{1}\,.$$

Зафиксируем произвольно точку $m \in \mathcal{M}$ и перейдем к локальным координатам на $\mathcal{M}$ в окрестности этой точки. На основании предположения (2.1.17) и основной леммы вариационного исчисления Дю-Буа – Раймонда заключаем, что всюду в этой окрестности точки m коэффициенты формы $d\alpha$ обращаются в нуль. Таким образом, выполнение (2.1.17) с указанными условиями на β эквивалентно требованию $d\alpha = 0$, понимаемому в традиционном смысле.

Отметим следующее полезное утверждение.

Лемма 2.1.1 *Пусть* $\alpha \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ *и* $\beta \in W^{1,q}(\mathcal{M})$ *– дифференциальные формы,* $\deg\alpha + \deg\beta = n - 1$, $1/p + 1/q = 1$, $\quad 1 \le p,\, q \le \infty$, *и* β *имеет компактный носитель. Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg\alpha+1} \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha \wedge d\beta. \qquad (2.1.18)$$

В частности, форма α *слабо замкнута тогда и только тогда, когда* $d\alpha = 0$ *почти всюду на* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Зафиксируем формы α и β с описанными свойствами. Так как коэффициенты формы α суть класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, то найдется последовательность форм $\{\alpha_l\}_{l=1}^\infty$ с коэффициентами класса $C^1(\mathcal{M})$, сходящамися по W^1_p-норме к коэффициентам формы α на всяком компактном подмножестве $K \subset \mathrm{int}\mathcal{M}$.

Пусть $\{\beta_l\}_{l=1}^\infty$ – последовательность форм класса $C^1(\mathcal{M})$ и степени $\deg\beta_l = \deg\beta = k$, имеющих компактные носители и сходящихся по W^1_q-норме к форме β. Мы вправе предположить, что существует некоторое гладкое подмногообразие $U \subset\subset \mathcal{M}$, для которого $\mathrm{supp}\,\beta_l \subset U$ при всех целых l.

Формы $\alpha_l \wedge \beta_l$ имеют компактные носители в U. Формула Стокса влечет

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d(\alpha_l \wedge \beta_l) = \int\limits_U d(\alpha_l \wedge \beta_l) = 0\,,$$

и потому

$$\int\limits_U d\alpha_l \wedge \beta_l + (-1)^{\deg\alpha} \int\limits_U \alpha_l \wedge d\beta_l = 0\,.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_U d\alpha \wedge \beta - \int\limits_U d\alpha_l \wedge \beta_l = \int\limits_U (d\alpha - d\alpha_l) \wedge \beta + \int\limits_U d\alpha_l \wedge (\beta - \beta_l)$$

и, пользуясь теперь неравенством (2.1.12), получаем

$$\Big|\int\limits_U d\alpha \wedge \beta - \int\limits_U d\alpha_l \wedge \beta_l\Big| \le$$

$$\le \int\limits_U |d(\alpha - \alpha_l) \wedge \beta| * \mathbb{1} + \int\limits_U |d\alpha_l \wedge (\beta - \beta_l)| * \mathbb{1} \le$$

$$\le C \int\limits_U |d(\alpha - \alpha_l)|\,|\beta| * \mathbb{1} + C \int\limits_U |d\alpha_l|\,|\beta - \beta_l| * \mathbb{1} \le$$

$$\le C||d(\alpha - \alpha_l)||_{L^p(U)}\,||\beta||_{L^q(U)} + C||d\alpha_l||_{L^p(U)}\,||\beta - \beta_l||_{L^q(U)}\,,$$

где $C = C(k,n)$ – некоторая постоянная.

Аналогичным образом, находим

$$\Big|\int\limits_U \alpha \wedge d\beta - \int\limits_U \alpha_l \wedge d\beta_l\Big| \le$$

$$\le C_1 ||\alpha||_{L^p(U)}\, ||d(\beta - \beta_l)||_{L^q(U)} + C_1 ||\alpha - \alpha_l||_{L^p(U)}\, ||d\beta||_{L^q(U)}\,,$$

где $C_1 = C_1(k,n)$.

Полученные соотношения легко влекут (2.1.18).

Если дифференциал $d\alpha = 0$ почти всюду на $\mathcal{M}$, то в соответствии с (2.1.18) имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \alpha \wedge d\beta = 0 \tag{2.1.19}$$

для всякой формы $\beta \in W^1_q$ с компактным носителем. Это, очевидным образом влечет (2.1.17).

С другой стороны, если форма $\alpha \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ слабо замкнута, то в силу (2.1.18),

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d\alpha \wedge \beta = 0 \quad \text{при всех } \beta \in W^1_q(\mathcal{M}), \quad \operatorname{supp}\beta \subset \mathcal{M}\,.$$

Зафиксируем произвольно точку $m \in \mathcal{M}$ и перейдем к локальным координатам на $\mathcal{M}$ в окрестности m. Пользуясь леммой Дю-Буа – Раймонда, заключаем, что почти всюду в этой окрестности форма $d\alpha$ обращается в нуль. □

Имеет место следующее высказывание.

Лемма 2.1.2 *Предположим, что формы α_1 и α_2 слабо замкнуты, причем $\deg\alpha_1 + \deg\alpha_2 \le n-1$, где*

$$\alpha_1 \in L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}), \quad \alpha_2 \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}) \cap W^1_{p_2,\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$$

и $1 \le p_1,\, p_2 \le \infty$. Тогда форма $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ также слабо замкнута.

Доказательство. Для всякой из форм β со свойствами

$$\beta \in W_q^1(\mathcal{M}), \quad 1/p_1 + 1/q = 1, \quad \deg\beta = \deg\alpha_1 + 1,$$

и компактным носителем в силу замкнутости α_1 выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha_1, \delta\beta \rangle * \mathbb{1} = (-1)^l \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha_1, *^{-1} d * \beta \rangle * \mathbb{1} = 0, \quad l = \deg\beta\,.$$

Однако, $\langle \alpha_1, *^{-1} d * \beta \rangle = *^{-1}(\alpha_1 \wedge d * \beta)$ и, далее,

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha_1, \delta\beta \rangle * \mathbb{1} = (-1)^l \int\limits_{\mathcal{M}} *^{-1}(\alpha_1 \wedge d * \beta) * \mathbb{1} = (-1)^l \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha_1 \wedge d * \beta = 0\,.$$

Таким образом, для произвольной формы β_1 с компактным носителем и такой, что

$$\deg\beta_1 = n - \deg\alpha_1 - 1, \quad \beta_1 \in W_q^1(\mathcal{M})\,,$$

мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \alpha_1 \wedge d\beta_1 = 0\,.$$

Положим $\beta_1 = \alpha_2 \wedge \beta_2$, где

$$\deg\beta_2 = n - \deg\alpha_1 - \deg\alpha_2 - 1, \quad \beta_2 \in W_s^1(\mathcal{M}), \quad 1/q + 1/p_1 = 1\,,$$

и носитель формы β_2 компактен.

Так как форма α_2 замкнута, то

$$d\beta_1 = d\alpha_2 \wedge \beta_2 + (-1)^{\deg\alpha_2}\alpha_2 \wedge d\beta_2 = (-1)^{\deg\alpha_2}\alpha_2 \wedge d\beta_2\,.$$

Тем самым, находим

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge d\beta_2 = 0 \quad \text{для всех} \ \ \beta_2\,.$$

Однако,

$$\begin{aligned}(\alpha_1\wedge\alpha_2)\wedge d\beta_2 &= **^{-1}(\alpha_1\wedge\alpha_2)\wedge**^{-1}d\beta_2 =\\ &= \langle\alpha_1\wedge\alpha_2, *^{-1}d\beta_2\rangle*\mathbb{1} =\\ &= (-1)^{l_1}\langle\alpha_1\wedge\alpha_2, (-1)^{l_1}*^{-1}d*(*^{-1}\beta_2)\rangle*\mathbb{1} =\\ &= (-1)^{l_1}\langle\alpha_1\wedge\alpha_2, \delta(*^{-1}\beta_2)\rangle*\mathbb{1},\end{aligned}$$

где $l_1=\deg *^{-1}\beta_2$, и мы получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\langle\alpha_1\wedge\alpha_2, *^{-1}d\beta_2\rangle*\mathbb{1} = (-1)^{l_1}\int\limits_{\mathcal{M}}\langle\alpha_1\wedge\alpha_2, \delta*^{-1}\beta_2\rangle\ *\mathbb{1}=0\,.$$

Заметим теперь, что

$$\deg *^{-1}\beta_2 = n-\deg\beta_2 = \deg\alpha_1+\deg\alpha_2+1\,.$$

Форма $\alpha_1\wedge\alpha_2$ имеет коэффициенты класса $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, а форма β_2 класса $W^1_q(\mathcal{M})$ произвольна. Это доказывает лемму. □

Пусть $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ – отображение класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$. Для всякой дифференциальной формы u на $\mathcal{N}$ мы обозначаем через F^*u форму $u\circ F$. Это индуцированное отображение $F^*:\bigwedge^*(\mathcal{N})\to\bigwedge^*(\mathcal{M})$ обладает свойствами:

если $u,v\in\bigwedge^0(\mathcal{N})$ и $\alpha\in\bigwedge^l(\mathcal{N})$, $\beta\in\bigwedge^l(\mathcal{N})$, то

$$F^*(u\alpha+v\beta)=(F^*u)(F^*\alpha)+(F^*v)(F^*\beta);$$

если $\alpha\in\bigwedge^l(\mathcal{N})$, $\beta\in\bigwedge^p(\mathcal{N})$, то

$$F^*(\alpha\wedge\beta)=(F^*\alpha)\wedge(F^*\beta);$$

для произвольной формы $\alpha\in\bigwedge^*(\mathcal{M})$ выполнено

$$d(F^*\alpha)=F^*(d\alpha);$$

наконец, если $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и $G : \mathcal{N} \to P$, то

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* .$$

Естественным способом определяются операции с векторными и поливекторными полями на $\mathcal{M}$.

Будем говорить, что k-векторное поле на многообразии $\mathcal{M}$ принадлежит некоторому классу, если дифференциальная форма Ωu на $\mathcal{M}$ принадлежит данному классу. В частности, поле k-векторов класса $L^p(\mathcal{M})$ называется *замкнутым,* если дифференциальная форма Ωu обладает свойством (2.1.17).

Предположим, что через каждую точку многообразия $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = n$, проходит p-мерное, $1 \le p \le n-1$, подмногообразие $\mathcal{M}_\tau$ класса C^1 такое, что

$$\bigcup_\tau \mathcal{M}_\tau = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}_{\tau_1} \bigcap \mathcal{M}_{\tau_2} = \emptyset \quad \text{при} \quad \tau_1 \ne \tau_2 .$$

В этом случае мы будем говорить, что задано *слоение* многообразия $\mathcal{M}$ класса C^1 и размерности p. Подмногообразия $\mathcal{M}_\tau$ называются *слоями* слоения $\{\mathcal{M}_\tau\}$.

Пусть $\partial\mathcal{M} \ne \emptyset$ и пусть $\mathcal{U}$ – многообразие размерности $\dim \mathcal{U} = p < n$ с непустой границей $\partial\mathcal{U} \ne \emptyset$. Пусть $f(m) : \mathcal{M} \to \mathcal{U}$ – отображение класса C^1, для которого $f(\partial\mathcal{M}) \subset \partial\mathcal{U}$. Если в каждой точке $m \in \mathcal{M}$ выполняется

$$\text{rank } (f'(m)) = p, \tag{2.1.20}$$

то по теореме о неявной функции прообразом каждой точки является C^1-подмногообразие, и мы имеем C^1-слоение многообразия $\mathcal{M}$ со слоями

$$\mathcal{M}_\tau = \{m \in \mathcal{M} : f(m) = \tau, \ \tau \in \mathcal{U}\}$$

размерности $\dim \mathcal{M}_\tau = n - p$.

Важнейший случай, когда $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ есть область и $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^p$. Пусть $m \in \mathcal{M}$ и пусть лист $\mathcal{M}_\tau$ проходит через m. Если условие (2.1.20) выполнено в m, то пространство $T_m(\mathcal{M})$, ортогональное $\mathcal{M}_\tau$, задается поливектором $\nabla f_1(m) \wedge \ldots \wedge \nabla f_p(m)$. Условие (2.1.20) регулярности слоения $\{\mathcal{M}_\tau\}$ в точке m принимает вид

$$\nabla f_1(m) \wedge \ldots \wedge \nabla f_p(m) \ne 0. \tag{2.1.21}$$

Отметим более общий случай [110, глава 4]. Пусть $\mathcal{M}$ – риманово многообразие класса C^1 (с границей, возможно пустой). Говорят, что на $\mathcal{M}$ определено k-мерное слоение $\{\mathcal{M}_\tau\}$, если на $\mathcal{M}$ задана система линейно связных, замкнутых подмножеств $\mathcal{M}_\tau$ многообразия $\mathcal{M}$ со свойствами:

(i) $\bigcup\limits_\tau \mathcal{M}_\tau = \mathcal{M}$,

(ii) $\mathcal{M}_{\tau_1} \cap \mathcal{M}_{\tau_2} = \emptyset \quad$ для всех $\tau_1, \tau_2, \quad \tau_1 \neq \tau_2$,

(iii) для почти всех точек $m \in \mathcal{M}$ слои $\mathcal{M}_\tau$ имеют k-мерные касательные плоскости $T(m; k) \subset T_m(\mathcal{M})$.

2.2 $\mathcal{WT}$-Классы дифференциальных форм

Ниже вводятся классы дифференциальных форм с обобщенными производными. Мы будем использовать их при изучении ассоциированных классов квазилинейных эллиптических уравнений с частными производными.

2.2.1 Определения $\mathcal{WT}$-классов

Пусть $\mathcal{M}$ – риманово многообразие класса C^3, $\dim \mathcal{M} = n$, с краем или без края и пусть

$$w \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}),\ \deg w = k,\ 0 \le k \le n,\ p > 1, \tag{2.2.1}$$

– слабо замкнутая дифференциальная форма на $\mathcal{M}$.

Определение 2.2.1 *Дифференциальная форма w вида* (2.2.1) *принадлежит классу $\mathcal{WT}_1$ на $\mathcal{M}$, если существуют слабо замкнутая дифференциальная форма*

$$\theta \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}),\ \deg \theta = n-k,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2.2.2}$$

и постоянная ν_0 такие, что почти всюду на $\mathcal{M}$ выполнено

$$\nu_0\ |\theta|^q \le\ \langle w, *\theta \rangle\,. \tag{2.2.3}$$

Определение 2.2.2 *Форма* (2.2.1) *принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{M}$, если существуют дифференциальная форма* (2.2.2) *и некоторые постоянные $\nu_1,\ \nu_2 > 0$ такие, что почти всюду на $\mathcal{M}$ выполняются соотношения*

$$\nu_1\,|w|^p \le\ \langle w, *\theta \rangle \tag{2.2.4}$$

и

$$|\theta| \le \nu_2\,|w|^{p-1}\,. \tag{2.2.5}$$

Для всякой простой дифференциальной формы (степени k)

$$w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$$

мы полагаем

$$\|w\| = \Big(\sum_{i=1}^{k} |w_i|^2\Big)^{1/2}.$$

Имеет место следующее *неравенство Адамара* [30, стр. 230]

$$|w| \leq \prod_{i=1}^{k} |w_i|\,.$$

Пользуясь неравенством между геометрическим и арифметическим средними

$$\Big(\prod_{i=1}^{k} |w_i|\Big)^{1/k} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |w_i| \leq \Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |w_i|^2\Big)^{1/2},$$

получаем

$$|w| \leq k^{-\frac{k}{2}}\|w\|^k\,. \tag{2.2.6}$$

Определение 2.2.3 *Простая дифференциальная форма (степени k)*

$$w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k,\ w_i \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})\,,\ 1 \leq i \leq k\,,$$

принадлежит классу $\mathcal{WT}_3$ на $\mathcal{M}$, если существует дифференциальная форма (2.2.2) *такая, что почти всюду на $\mathcal{M}$ выполнено соотношение* (2.2.5) *и*

$$\nu_3\,\|w\|^{kp} \leq k^{\frac{kp}{2}}\ \langle w, *\theta\rangle. \tag{2.2.7}$$

Определение 2.2.4 *Простая дифференциальная форма (степени k)*

$$w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k,\ w_i \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}),\ 1 \leq i \leq k,$$

принадлежит классу $\mathcal{WT}_4$ на $\mathcal{M}$, если существует простая дифференциальная форма (2.2.2) *такая, что почти всюду на $\mathcal{M}$ имеет место неравенство* (2.2.7), *причем*

$$(n-k)^{\frac{-(n-k)}{2}}\|\theta\|^{n-k} \leq \nu_4\,|w|^{p-1}\,. \tag{2.2.8}$$

Замечание 2.2.1 *Поскольку каждая дифференциальная форма степени 1 является простой, при $k = 1$ класс $\mathcal{WT}_2$ совпадает с классом $\mathcal{WT}_3$, а при $k = n - 1$ класс $\mathcal{WT}_3$ совпадает с $\mathcal{WT}_4$.*

Теорема 2.2.1 *Имеют место следующие соотношения между введенными $\mathcal{WT}$-классами:*

$$\mathcal{WT}_4 \subset \mathcal{WT}_3 \subset \mathcal{WT}_2 \subset \mathcal{WT}_1.$$

Доказательство. Первые два соотношения следуют очевидным образом из (2.2.6). Чтобы доказать последнее из соотношений достаточно заметить что

$$|\theta|^q = |\theta|^{\frac{p}{p-1}} \le (\nu_2^{\frac{1}{p-1}}|w|)^p \le \nu_2^{\frac{p}{p-1}}\nu_1^{-1}\ \langle w, *\theta\rangle.$$

□

Пусть v – дифференциальная форма класса

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}), \quad \deg v = k, \quad 1 \le k \le n.$$

Определим оператор Δ, который всякой p-форме v сопоставляет p-форму Δv, задаваемую выражением

$$\Delta = d\,\delta + \delta\,d. \tag{2.2.9}$$

Будем говорить, что дифференциальная форма v является *гармонической*, если $\Delta v = 0$.

В частности, гармоническая 0-форма есть не что иное, как гармоническая функция в обычном смысле.

Пример 2.2.1 Опишем гармонические функции на поверхности. Рассмотрим локально билипшицеву k-мерную поверхность $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, описываемую в примере 1.1.3. Оператор Лапласа в метрике Ω имеет вид

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} \sum_{j=1}^{k} g^{ij}(x)\, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \tag{2.2.10}$$

и называется оператором Лапласа-Бельтрами.

Уравнение $\Delta_\Omega f = 0$ описыват гармонические функции в метрике ds_Ω. В случае, когда метрика $ds_\Omega = |dx|$ – евклидова, оператор Лапласа-Бельтрами есть обычный оператор Лапласа и решения уравнения

$$\Delta f = 0$$

суть обычные гармонические функции.

Из соотношения (2.2.9) вытекает, что если форма v одновременно слабо замкнута и слабо козамкнута, то есть,

$$dv = \delta v = 0\,, \tag{2.2.11}$$

то она является гармонической.

Теорема 2.2.2 *Пусть v – дифференциальная форма класса $L^2_{\rm loc}(\mathcal{M})$, $\deg v = k$. Если v является гармонической, то v принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{M}$ со структурными постоянными $p = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$.*

Доказательство. Полагая $\theta = *^{-1} v \in L^2_{\rm loc}(\mathcal{M})$, имеем

$$\langle v, *\theta\rangle = \langle v, v\rangle = |v|^2$$

и $|\theta| = |v|$. Дифференциальная форма $*^{-1}v$ слабо замкнута, поскольку $*^{-1}v = (-1)^{k(n-k)} * v$. Таким образом, условия (2.2.4), (2.2.5) действительно выполняются с постоянными $p = 2$, $\nu_2 = \nu_3 = 1$. $\square$

2.2.2 Связь с эллиптическими уравнениями

Опишем рассматриваемые классы дифференциальных уравнений и систем на многообразии. При этом мы будем использовать, в частности, некоторые соображения из [170], [174].

Пусть $\mathcal{M}$ – риманово многообразие и пусть

$$A : \bigwedge^k(T(\mathcal{M})) \to \bigwedge^k(T(\mathcal{M}))$$

– отображение, определенное почти всюду на слоении $\bigwedge^k(T(\mathcal{M}))$ касательных k-ковекторов. Предположим, что для почти всех $m \in \mathcal{M}$ отображение A определено на пространстве $\bigwedge^k(T_m(\mathcal{M}))$ касательных k-ковекторов, то есть, для почти всех $m \in \mathcal{M}$ отображение

$$A(m,\ .\ ) : \xi \in \bigwedge^k(T_m(\mathcal{M})) \to \bigwedge^k(T_m(\mathcal{M}))$$

непрерывно. Предположим, что отображение $m \mapsto A(m, X)$ измеримо для всех измеримых k-ковекторных полей X. Предположим, что для почти всех $m \in \mathcal{M}$ и всех $\xi \in \bigwedge^k(T_m(\mathcal{M}))$ мы имеем

$$\nu_0\,|A(m,\xi)|^p \le \langle \xi, A(m,\xi)\rangle \tag{2.2.12}$$

с постоянными $p > 1$ и $\nu_0 > 0$.

Дифференциальная форма $w \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ называется *A-гармонической*, если она является решением некоторого A-гармонического уравнения

$$\delta A(m, dw) = 0 \ , \tag{2.2.13}$$

понимаемого в обобщенном смысле, то есть,

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle d\Phi, A(m, dw)\rangle \ast \mathbb{1} = 0 \tag{2.2.14}$$

для всякой дифференциальной формы $\Phi \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, $1/p + 1/q = 1$, с носителем $\operatorname{supp}\Phi \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$.

Теорема 2.2.3 *Если дифференциальная форма $w \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ является A-гармонической и обладает свойством* (2.2.12), *то дифференциальная форма dw принадлежит классу $\mathcal{WT}_1$ на $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть w, $\deg w = k$, – решение (2.2.13), понимаемое в слабом смысле. Предположим, что дифференциальная форма $\alpha(m)$ ассоциирована с векторным полем $A(m, dw)$ в точке m и пусть $\theta = \ast\,\alpha$. Форма w слабо замкнута ввиду (2.2.19) и слабой замкнутости θ. Мы имеем

$$\begin{aligned}(-1)^{nk+1}\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \theta, \delta\psi\rangle \ast \mathbb{1} \ &= \ \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \ast\,\alpha, \ast\, d\ast\psi\rangle \ast \mathbb{1} = \\ = \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \alpha, d\ast\psi\rangle \ast \mathbb{1} \ &= \ \int\limits_{\mathcal{M}} \langle A(m, dw), d\phi\rangle \ast \mathbb{1} \ = \ 0\end{aligned}$$

при всех $\psi = \ast^{-1}\phi \in W^{1,q}(\mathcal{M})$ с носителем $\operatorname{supp}\psi \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$. Далее, на основании (2.2.12) получаем

$$\nu_0|\theta|^q = \nu_0|A(m, dw)|^q \le \langle dw, A(m, dw)\rangle = \langle dw, \ast\theta\rangle \ ,$$

что гарантирует (2.2.3). $\square$

Предположим, что $A(m, \xi)$ удовлетворяет условиям

$$\nu_1\,|\xi|^p \le \langle \xi, A(m, \xi)\rangle, \tag{2.2.15}$$

и

$$|A(m,\xi)| \le \nu_2\,|\xi|^{p-1} \tag{2.2.16}$$

при $p>1$ и с некоторыми постоянными $\nu_1, \nu_2 > 0$. Ясно, что $\nu_1 \le \nu_2$.

Теорема 2.2.4 *Дифференциальная форма* $w \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ *является* A-*гармонической со свойствами* (2.2.15), (2.2.16) *тогда и только тогда, когда форма* $dw \in \mathcal{WT}_2$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.2.3 определяем θ. Слабая замкнутость w и θ следует как выше. В силу (2.2.15) имеем

$$\nu_1 |dw|^p \le \langle dw, A(m, dw)\rangle = \langle dw, *\,\theta\rangle$$

и на основании (2.2.16) получаем

$$|\theta| = |*\,\alpha| = |A(m, dw)| \le \nu_2 |dw|^{p-1}\,.$$

Таким образом, если $dw \in \mathcal{WT}_2$, то существует слабо замкнутая дифференциальная форма θ (см. (2.2.2)) такая, что (2.2.4) и (2.2.5) удовлетворяются. С векторным полем $a : \mathcal{M} \to \Lambda_k(\mathbb{R})$ ассоциируется дифференциальная форма $\alpha = *\,\theta$. Мы определяем

$$A(m,\xi) = \begin{cases} a(m)\ , & \xi = dw(m)\ , \\ \xi|\xi|^{p-2}, & \xi \ne dw(m)\ . \end{cases} \tag{2.2.17}$$

Слабая замкнутость θ обеспечивает, что w есть решение (2.2.13), понимаемое в слабом смысле. Условия (2.2.15) и (2.2.16) на A удовлетворяются ввиду (2.2.4) и (2.2.5). □

В частном случае $k=0$ условия (2.2.13), (2.2.14) принимают вид, традиционный для уравнений с частными производными. Именно, функция $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ является решением уравнения

$$\operatorname{div} A(m, \nabla f) = 0\ , \tag{2.2.18}$$

понимаемого в следующем смысле

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \langle \nabla\varphi, A(m,\nabla f)\rangle \,*\, \mathbb{1} = 0 \tag{2.2.19}$$

для всякой функции

$$\varphi \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

с носителем $\operatorname{supp}\Phi \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$.

2.2.3 Связь с отображениями с ограниченным искажением

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – римановы многообразия размерностей $\dim\mathcal{A} = k$, $\dim\mathcal{B} = n-k$, $1 \le k < n$, и скалярными произведениями $\langle\,,\rangle_A$, $\langle\,,\rangle_B$, соответственно. На декартовом произведении $\mathcal{N} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ мы вводим структуру риманова многообразия со скалярным произведением

$$\langle\,,\rangle = \langle\,,\rangle_{\mathcal{A}} + \langle\,,\rangle_{\mathcal{B}}.$$

Обозначим через $\pi : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и $\eta : \mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ естественные проекции многообразия $\mathcal{N}$ на подмногообразия.

Если $w_{\mathcal{A}}$ и $w_{\mathcal{B}}$ – формы объема на A и $\mathcal{B}$, соответственно, то дифференциальная форма $w_{\mathcal{N}} = \pi^* w_{\mathcal{A}} \wedge \eta^* w_{\mathcal{B}}$ является формой объема на $\mathcal{N}$.

Теорема 2.2.5 *Пусть $F : \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ – отображение с ограниченным искажением и пусть $f = \pi\circ F : \mathcal{M}\to\mathcal{A}$, $g = \eta\circ F : \mathcal{M}\to\mathcal{B}$. Тогда пара форм $w = f^* v_{\mathcal{A}}$, $\theta = g^* v_{\mathcal{B}}$ удовлетворяет условиям* (2.2.4), (2.2.5) *на $\mathcal{M}$ с постоянными $\nu_1 = \nu_1(n,k,K)$, $\nu_2 = \nu_2(n,k,K)$ и $p = n/k$.*

В частности, форма $f^* w_{\mathcal{A}}$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{M}$ с теми же структурными постоянными p, ν_1 и ν_2.

Замечание 2.2.2 Из доказательства теоремы будет ясно, что структурные постоянные могут быть выбраны в виде

$$\nu_1^{-1} = (k + \frac{n-k}{\overline{c}^2})^{-n/2} n^{n/2} K_O, \quad \nu_2^{-1} = \underline{c}^{\,n-k},$$

где $\overline{c} = \overline{c}(k,n,K_O)$ и $\underline{c} = \underline{c}(k,n,K_O)$ суть, соответственно, наибольший и наименьший из корней уравнения

$$(k\xi^2 + (n-k))^{n/2} - n^{n/2} K_O\, \xi^k = 0. \tag{2.2.20}$$

Доказательство теоремы. Полагая $g = \eta \circ F : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$, выберем $\theta = g^* w_{\mathcal{B}}$. Форма объема $w_{\mathcal{B}}$ слабо замкнута.

Действительно, если отображение g достаточно регулярно, то

$$d\theta = dg^* w_{\mathcal{B}} = g^* dw_{\mathcal{B}} = 0\,.$$

В общем случае для проверки условия (2.1.17) мы аппроксимируем отображение $g : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ по норме $W^{1,n}$ гладкими отображениями g_l, $l = 1, 2, \dots$. Так как условие (2.1.17) выполнено для каждой дифференциальной формы $g_l^* w_{\mathcal{B}}$, оно должно быть выполнено также для дифференциальной формы $g^* w_{\mathcal{B}}$.

Слабая замкнутость формы $f^* w_{\mathcal{A}}$ проверяется аналогично.

Фиксируем точку $m \in \mathcal{M}$, в которой соотношение (1.1.17) имеет место. Положим $a = f(m)$, $b = g(m)$. Тогда

$$T_{F(m)}(\mathcal{N}) = T_a(\mathcal{A}) \times T_b(\mathcal{B}).$$

Необходимые вычисления удобно проделать следующим образом. Во-первых, мы перепишем условие (1.1.17) в виде

$$|F'(m)|^n \le K_O |F^* w_{\mathcal{N}}|\,, \tag{2.2.21}$$

где $w_{\mathcal{N}}$ есть форма объема на $\mathcal{N}$.

Для каждой из точек $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ выберем окрестности и в них локальные системы координат $y_1, \dots, y_k$ и $y_{k+1}, \dots, y_n$, ортонормальные в a и b, соответственно. Мы имеем

$$\begin{aligned} f^* w_{\mathcal{A}} &= f^*(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k) = f^* dy_1 \wedge \ldots \wedge f^* dy_k \\ &= df_1 \wedge \ldots \wedge df_k, \quad f_i = y_i \circ f, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Так как дифференциальная форма $w_{\mathcal{A}}$ является простой, в силу неравенства между геометрическим и арифметическим средними, получаем

$$\begin{aligned} |df_1 \wedge \ldots \wedge df_k|^{1/k} &\le \left(\prod_{i=1}^k |df_i|\right)^{1/k} \le \\ &\le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |df_i| \le \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |df_i|^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Аналогично,

$$|dg_{k+1} \wedge \ldots \wedge dg_n|^{1/(n-k)} \le \left(\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2\right)^{1/2}. \tag{2.2.23}$$

Нетрудно видеть, что

$$F^*w_{\mathcal{N}} = F^*(\pi^*w_{\mathcal{A}} \wedge \eta^*w_{\mathcal{B}}) = f^*w_{\mathcal{A}} \wedge g^*w_{\mathcal{B}} = f^*w_{\mathcal{A}} \wedge \theta$$

и, далее, что

$$|F^*w_{\mathcal{N}}| = |f^*w_{\mathcal{A}} \wedge g^*w_{\mathcal{B}}| \leq |df_1 \wedge \ldots \wedge df_k||dg_{k+1} \wedge \ldots \wedge dg_n|.$$

Мы имеем

$$|dF|^2 = \sum_{i=1}^{k} |df_i|^2 + \sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2 \leq n\,|F'|^2 .$$

Таким образом, мы получаем из (2.2.21), (2.2.22) и (2.2.23)

$$\Big(k|f^*w_{\mathcal{A}}|^{2/k} + (n-k)|g^*w_{\mathcal{B}}|^{2/(n-k)}\Big)^{n/2} \leq$$

$$\leq n^{n/2}\,K_O\langle f^*w_{\mathcal{A}}, *\theta\rangle \leq n^{n/2}\,K_O|f^*w_{\mathcal{A}}||g^*w_{\mathcal{B}}|.$$

Положим

$$\xi = \frac{|f^*w_{\mathcal{A}}|^{1/k}}{|g^*w_{\mathcal{B}}|^{1/(n-k)}}\ .$$

Предыдущее соотношение принимает вид

$$\big(k\xi^2 + (n-k)\big)^{n/2} \leq n^{n/2}\,K_O\xi^k.$$

Пользуясь обозначениями $\underline{c}$ и $\overline{c}$ для наименьшего и наибольшего из корней уравнения (2.2.20), имеем $\underline{c} \leq \xi \leq \overline{c}$ и

$$\underline{c}|g^*w_{\mathcal{B}}|^{1/(n-k)} \leq |f^*w_{\mathcal{A}}|^{1/k} \leq \overline{c}|g^*w_{\mathcal{B}}|^{1/(n-k)}. \qquad (2.2.24)$$

Как и выше, из (2.2.24) следует, что

$$|f^*w_{\mathcal{A}}|^{n/k} \leq \left(k + \frac{n-k}{\overline{c}^2}\right)^{-n/2} n^{n/2}\,K_O\langle f^*w_{\mathcal{A}}, *\theta\rangle.$$

Таким образом, условие (2.2.4) принадлежности формы $f^*w_{\mathcal{A}}$ степени k классу $\mathcal{WT}_2$ действительно удовлетворяется.

Чтобы проверить условие (2.2.5) достаточно заметить, что на основании (2.2.24) имеем

$$\underline{c}^{n-k}|\theta| \leq |f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n-k}{k}}\ . \qquad (2.2.25)$$

□

Пусть $1 \le k \le n$ и пусть $y_1, \dots, y_k$ – ортонормальные системы координат в $\mathbb{R}^k$. Пусть $\mathcal{A}$ – область в $\mathbb{R}^k$ и пусть $\mathcal{B}$ – $(n-k)$-мерное риманово многообразие. Рассмотрим многообразие $\mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Пусть $F = (f_1, f_2, \dots, f_k, g) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ и $g = \eta \circ F$ определено как и выше. Мы имеем $f^* w_{\mathcal{A}} = df_1 \wedge \dots \wedge df_k$.

Теорема 2.2.6 *Если отображение F является отображением с ограниченным искажением, то дифференциальная форма $f^* w_{\mathcal{A}}$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_3$ на $\mathcal{M}$ со структурными постоянными $p = n/k$, $\nu_2 = \nu_2(k, n, K_O)$, $\nu_3 = \nu_3(k, n, K_O)$.*

Замечание 2.2.3 *Мы можем выбрать постоянные ν_2, ν_3 так, чтобы*

$$\nu_2 = \underline{c}_1^{k-n}, \quad \nu_3 = (1 + \frac{1}{\overline{c}_1^2})^{n/2} n^{-n/2} k^{n/2} K_O^{-1} ,$$

где $\underline{c}_1$ – наименьший и $\overline{c}_1$ – наибольший из положительных корней уравнения

$$(\xi^2 + 1)^{n/2} - n^{n/2} k^{-k/2} (n-k)^{-(n-k)/2} \, K_O \, \xi^k = 0. \tag{2.2.26}$$

Доказательство теоремы 2.2.6. В противоположность предыдущему случаю k-форма $f^* w_{\mathcal{A}}$ имеет теперь представление в глобальных координатах. Так как все предыдущие аргументы имели локальный характер, то они применимы также и в рассматриваемом случае. Как и выше, мы можем выбрать $\theta = g^* w_{\mathcal{B}}$. Условие (2.2.5) выполняется с той же самой постоянной.

Приступим к проверке условия (2.2.7). Комбинируя (2.2.21), (2.2.22) и (2.2.23), получаем

$$\Big(\textstyle\sum_{i=1}^k |df_i|^2 + \sum_{i=k+1}^n |dg_i|^2\Big)^{n/2} \le$$

$$\le C \Big(\textstyle\sum_{i=1}^k |df_i|^2\Big)^{k/2} \Big(\sum_{i=k+1}^n |dg_i|^2\Big)^{(n-k)/2} ,$$

где $C = k^{-k/2} (n-k)^{-(n-k)/2} n^{n/2} K_O$.

Теперь положим

$$\xi = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} |df_i|^2}{\sum\limits_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2} \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$(\xi^2 + 1)^{n/2} \leq k^{-k/2} (n-k)^{-(n-k)/2} n^{n/2} \, K_O \xi^k.$$

Если $\underline{c}_1, \overline{c}_1$ суть, соответственно, наименьший и наибольший из положительных корней (2.2.26), то

$$\underline{c}_1 \Big(\sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2 \Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |df_i|^2 \Big)^{1/2} \leq \overline{c}_1 \Big(\sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2 \Big)^{1/2}. \qquad (2.2.27)$$

Из соотношений (2.2.21) и (2.2.27) следует, что

$$\Big(\frac{1}{\overline{c}_1^2} + 1 \Big)^{n/2} \Big(\sum_{i=1}^{k} |df_i|^2 \Big)^{n/2} \leq n^{n/2} K_O \langle f^* w_{\mathcal{A}}, *\theta \rangle,$$

что гарантирует справедливость (2.2.7). □

Теорема 2.2.7 *Если отображение $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ является отображением с ограниченным искажением, то дифференциальная форма*

$$f^* w_{\mathcal{A}} = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$$

принадлежит классу $\mathcal{WT}_4$ на $\mathcal{M}$ со структурными постоянными $p = n/k$, $\nu_3 = \nu_3(k, n, K_O)$, $\nu_4 = \nu_4(k, n, K_O)$.

Доказательство. Как и выше, мы полагаем $\theta = dg_{k+1} \wedge \ldots \wedge dg_n$. Условие (2.2.7) уже проверено. Согласно (2.2.21), (2.2.23) и (2.2.27) имеем

$$(1 + \underline{c}_1^2)^{n/2} \Big(\sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2 \Big)^{n/2} \leq C \, |f^* w_{\mathcal{A}}| \Big(\sum_{i=k+1}^{n} |dg_i|^2 \Big)^{(n-k)/2}$$

с $C = (n-k)^{-(n-k)/2} n^{n/2} K_O$.

Таким образом,

$$\Big(\sum_{i=k+1}^{n}|dg_i|^2\Big)^{k/2} \le (n-k)^{-(n-k)/2}(1+\underline{c}_1^2)^{-n/2}n^{n/2}K_O|f^*w_{\mathcal{A}}|,$$

что легко ведет к нужному заключению. □

Замечание 2.2.4 *Постоянная ν_3 может быть выбрана как в теореме* 2.2.6, *а*

$$\nu_4 = \Big((n-k)^{-n/2}(1+\underline{c}_1^2)^{-n/2}n^{n/2}K_O\Big)^{(n-k)/k}.$$

Теорема 2.2.8 *Пусть $f=(f_1,\dots,f_{n-1}) : \mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n-1}$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ и пусть фундаментальная группа π_1 многообразия $\mathcal{M}$ тривиальна. Отображение f может быть продолжено до отображения ограниченным искажением*

$$F=(f,f_n)=(f_1,\dots,f_{n-1},f_n):\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$$

тогда и только тогда, когда дифференциальная форма

$$w = df_1\wedge\ldots\wedge df_{n-1}$$

степени $n-1$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_4$ на $\mathcal{M}$ с $p=n/(n-1)$.

Доказательство. Предположим, что отображение $F=(f,f_n)$ квазирегулярно. По теореме 2.2.7 дифференциальная форма w принадлежит классу $\mathcal{WT}_4$ на $\mathcal{M}$.

Обратно, пусть w – дифференциальная форма класса $\mathcal{WT}_4$. Тогда существует слабо замкнутая дифференциальная форма θ, $\deg\theta=1$, удовлетворяющая условиям (2.2.7) и (2.2.8). Так как π_1 тривиальна, то существует $W^{1,n}$-функция $f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ такая, что $df_n=\theta$. В силу (2.2.7), получаем

$$\nu_3\Big(\sum_{i=1}^{n-1}|df_i|^2\Big)^{n/2} \le (n-1)^{n/2}|df_1\wedge\ldots\wedge df_n|\,.$$

Условие (2.2.8) влечет

$$\nu_4^{-1}|df^n| \le |df_1\wedge\ldots\wedge df_{n-1}|^{1/(n-1)} \le \Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}|df_i|^2\Big)^{1/2}.$$

Тем самым, мы получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |df_i|^2\right)^{n/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |df_i|^2 + \frac{\nu_4^2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |df_i|^2\right)^{n/2} \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{\nu_4^2}{n-1}\right)^{n/2} \frac{1}{\nu_3} (n-1)^{n/2} |df_1 \wedge \ldots \wedge df_n| \,,$$

что влечет (1.1.17) с постоянной

$$K_O = (n - 1 + \nu_4^2)^{n/2} n^{-n/2} \nu_3^{-1} \,. \tag{2.2.28}$$

$\square$

Пример 2.2.2 Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – область с тривиальной фундаментальной группой π_1 и пусть

$$f = (f_1, \ldots, f_{n-1}) : D \to \mathbb{R}^{n-1}$$

– непрерывное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$.

Рассмотрим 1-форму

$$\theta = *^{-1} \left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right).$$

Данная форма является простой, как 1-форма, и слабо замкнутой, поскольку

$$\begin{aligned} d\theta = \; & d\left(*^{-1} \left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right)\right) = \\ & = (-1)^{n-1} \, d\left(* \left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right)\right) = \\ & = (-1)^{n-1} \, * \, d\left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Требования (2.2.7) и (2.2.8) записывается, соответственно, в виде

$$\nu_3 \| *^{-1} \left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right)\|^n \leq (n-1)^{n/2} \, |df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}|^2$$

и

$$\| *^{-1} \left(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}\right)\| \leq \nu_4 \, |df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}|^{1/(n-1)}$$

Данные соотношения, очевидно, выполняются, если существуют постоянные $\nu_3, \nu_4 > 0$ такие, что почти всюду в D имеет место соотношение

$$\| *^{-1} (df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1})\| \leq \tag{2.2.29}$$

$$\leq \min \left\{ \frac{(n-1)^{1/2}}{\nu_3^{1/n}} |df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}|^{2/n},\ \nu_4 \, |df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}|^{1/(n-1)} \right\} .$$

Положим

$$f_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} *^{-1}(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1}) \, ,$$

где интегрирование производится по произвольной дуге $\gamma \subset D$ с началом в точке $x_0 \in D$ и концом в точке $x \in D$.

Так как фундаментальная группа π_1 области D тривиальна, то интеграл не зависит от пути интегрирования и функция $f_n(x)$ определена однозначно.

По теореме 2.2.8 вектор - функция

$$F = (f, f_n) = (f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$$

осуществляет отображение с ограниченным искажением. Коэффициент внешней дилатации $K_O(F)$ подсчитывается по формуле (2.2.28), где постоянные ν_3, ν_4 берутся из неравенства (2.2.29).

$\square$

2.3 Оценки интеграла энергии

Основной результат данного раздела доставляют оценки скорости роста интеграла энергии формы класса $\mathcal{WT}_2$ на некомпактном римановом многообразии при различных граничных условиях для формы. В качестве приложения мы доказываем теоремы типа Фрагмена – Линделефа для форм данного класса и даем некоторое обобщение классической теоремы Альфорса о числе различных асимптотических мест целой функции конечного порядка [206].

2.3.1 Граничные условия

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие с непустым краем $\partial\mathcal{M}$. Зафиксируем замкнутую дифференциальную форму

$$w, \quad \deg w = k, \quad 1 \le k \le n, \quad w \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$$

класса $\mathcal{WT}_1$ и, дополнительно, замкнутую форму θ, $\deg\theta = n-k$, $\theta \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, удовлетворяющую условию (2.2.2). Предположим, что существует дифференциальная форма $Z \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ с непрерывными коэффициентами, для которой $dZ = w$.

Пусть $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$ – функция исчерпания $\mathcal{M}$, и пусть $B_h(\tau)$ – h-шар, $\Sigma_h(\tau)$ – h-сфера.

Будем говорить, что форма Z удовлетворяет *условию Дирихле* с нулевыми граничными данными, если для всякой дифференциальной формы $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, $\deg v = n-k$, и почти всех $\tau \in (0, h_0)$ выполнено

$$\int\limits_{B_h(\tau)} w \wedge v + (-1)^{k-1} \int\limits_{B_h(\tau)} Z \wedge dv = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} Z \wedge v\,. \tag{2.3.1}$$

В частности, форма Z удовлетворяет граничному условию (2.3.1), если ее коэффициенты непрерывны, а ее носитель не пересекает $\partial\mathcal{M}$, то есть,

$$\operatorname{supp} Z \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset, \text{ где } \operatorname{supp} Z = \overline{\{m \in \mathcal{M} : Z(m) \neq 0\}}. \tag{2.3.2}$$

Если $\mathcal{M}$ компактно, то соотношение (2.3.2) принимает вид

$$\int\limits_{\mathcal{M}} w \wedge v + (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathcal{M}} Z \wedge dv = 0. \tag{2.3.3}$$

Будем говорить, что форма Z удовлетворяет *условию Неймана* с нулевыми граничными данными, если для всякой дифференциальной формы $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, $\deg v = k-1$, и почти всех $\tau \in (0, h_0)$ выполнено

$$\int\limits_{B_h(\tau)} dv \wedge \theta = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} v \wedge \theta. \tag{2.3.4}$$

Если $\mathcal{M}$ компактно, то равенство (2.3.4) имеет вид

$$\int\limits_{\mathcal{M}} dv \wedge \theta = 0. \tag{2.3.5}$$

Будем говорить, что дифференциальная форма Z удовлетворяет *смешанному граничному условию* с нулевыми граничными данными, если для всякой функции $\phi \in C^1(\mathcal{M})$ и почти всех $\tau \in (0, h_0)$ выполнено

$$\int\limits_{B_h(\tau)} \phi w \wedge \theta + (-1)^{n-1} \int\limits_{B_h(\tau)} Z \wedge \theta \wedge d\phi = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \phi Z \wedge \theta. \tag{2.3.6}$$

Если $\mathcal{M}$ компактно, то (2.3.7) принимает вид

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \phi w \wedge \theta + (-1)^{n-1} \int\limits_{\mathcal{M}} Z \wedge \theta \wedge d\phi = 0. \tag{2.3.7}$$

Предположим, что форма

$$Z \in C^2(\mathrm{int}\mathcal{M}) \cap C^1(\partial\mathcal{M}) \tag{2.3.8}$$

обладает свойством (2.3.1). На основании формулы Стокса можно заключить, что для почти всех $\tau \in (0, h_0)$ выполняется

$$\int\limits_{B_h(\tau)} dZ \wedge v + (-1)^{k-1} \int\limits_{B_h(\tau)} Z \wedge dv = \int\limits_{\partial B_h(\tau)} Z \wedge v\,.$$

Таким образом, мы находим

$$\int\limits_{\partial B_h(\tau)\setminus\Sigma_h(\tau)} Z\wedge v = 0 \quad \text{при всех } \; v\in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}).$$

Данное соотношение влечет, что сужение Z на границу $\partial\mathcal{M}$ есть нулевая форма, т.е.

$$Z\,|_{\partial\mathcal{M}}(m) = 0 \quad \text{в каждой регулярной точке } \; m\in\partial\mathcal{M}. \tag{2.3.9}$$

Выясним геометрический смысл условия (2.3.9). Предположим, что $m\in\partial\mathcal{M}$ – точка, в которой граница $\partial\mathcal{M}$ имеет касательную плоскость $T_m(\partial\mathcal{M})$ и что форма Z удовлетворяет условию регулярности (2.3.8) в некоторой окрестности точки m.

Предложение 2.3.1 *Если дифференциальная форма Z является простой в точке $m\in\partial\mathcal{M}$, то соотношение* (2.3.9) *имеет место тогда и только тогда, когда форма Z имеет вид*

$$Z = \omega\wedge dx_n, \tag{2.3.10}$$

где ω есть некоторая форма, $\deg\omega = \deg Z - 1$.

Доказательство. Пусть $x_1,\dots,x_n$ – локальная система координат на $\mathcal{M}$, ортогональная в точке m и такая, что гиперплоскость $T_m(\partial\mathcal{M})$ описывается уравнением $x_n = 0$. Предположим, что $\deg Z = l$. Так как форма Z является простой, мы можем преобразовать ее к виду

$$\begin{aligned} Z &= \Big(\textstyle\sum_{i=1}^{l} a_{1,i}dx_i + a_{1,n}dx_n\Big)\wedge\dots \\ &\quad \dots\wedge\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{l} a_{l,i}dx_i + a_{l,n}dx_n\Big), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

где $a_{i,j} = a_{i,j}(m)$ суть некоторые постоянные. Условие (2.3.9) может быть теперь переписано следующим образом

$$\Big(\sum_{i=1}^{l} a_{1,i}dx_i\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i=1}^{l} a_{l,i}dx_i\Big) = 0,$$

и мы легко приходим к (2.3.10).

Обратное утверждение очевидно. □

Выясним геометрический смысл условия Неймана (2.3.4). Фиксируем формы

$$Z, v \in C^2(\mathrm{int}\mathcal{M}) \cap C^1(\partial\mathcal{M}).$$

По формуле Стокса для почти всех $\tau \in (0, h_0)$ имеем

$$\int\limits_{\partial B_h(\tau)} v \wedge \theta = \int\limits_{B_h(\tau)} dv \wedge \theta + (-1)^{k-1} \int\limits_{B_h(\tau)} v \wedge d\theta.$$

Так как форма θ замкнута, то условие (2.3.4) дает

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} v \wedge \theta = 0 \quad \text{при всех} \quad v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\,.$$

Таким образом,

$$\theta\,|_{\partial\mathcal{M}}(m) = 0 \tag{2.3.12}$$

в каждой точке гладкости границы $m \in \partial\mathcal{M}$.

В точности таким же образом проверяется, что нулевое смешанное граничное условие (2.3.6) эквивалентно условию

$$Z \wedge \theta\,|_{\partial\mathcal{M}}(m) = 0 \tag{2.3.13}$$

в каждой точке гладкости границы $m \in \partial\mathcal{M}$.

Пусть $m \in \partial\mathcal{M}$ – регулярная точка и пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в окрестности этой точки. В рассмотренном выше примере квазилинейных эллиптических уравнений мы имеем

$$\begin{aligned} \theta \quad &= * \textstyle\sum_{i=1}^n A_i(m, \nabla f(m)) dx_i = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} A_i(m, \nabla f(m)) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Положим $Z = f$. В случае (2.3.1) выберем $v = \phi\theta$, где θ есть произвольная, локально липшицева функция. Мы имеем

$$\int\limits_{B_h(\tau)} \phi df \wedge \theta + \int\limits_{B_h(\tau)} f d(\phi\theta) = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \phi f \theta$$

и, далее,

$$\int\limits_{B_h(\tau)} \sum_{i=1}^{n} (\phi f)_{x_i} A_i(m, \nabla f) * \mathbb{1} = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \phi f \theta, \quad \text{при всех } \phi. \tag{2.3.15}$$

Это соотношение характеризует обобщенные решения уравнения (2.2.18) с нулевым граничным условием Дирихле.

С другой стороны, выбирая в случае граничного условия Неймана (2.3.4) на v произвольную локально липшицеву функцию ϕ, для почти всех $\tau \in (0, h)$ получаем

$$\int\limits_{B_h(\tau)} \langle \nabla \phi, A(m, \nabla f) \rangle * \mathbb{1} = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \phi \langle A(m, \nabla f), \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}, \tag{2.3.16}$$

что характеризует обобщенные решения уравнения (2.2.18) с нулевыми граничными данными Неймана.

В каждой регулярной точке границы мы имеем

$$(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \,|_{\partial \mathcal{M}} = \cos(\nu, x_i)\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}},$$

где (ν, x_i) – угол между вектором внутренней нормали ν к $\partial\mathcal{M}$ и направлением $0x_i$, $d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}$ – элемент площади поверхности $\partial\mathcal{M}$..

Таким образом, в каждой регулярной граничной точке условие (2.3.12) эквивалентно требованию

$$\langle A(m, \nabla f(m)), \nu \rangle = 0.$$

Пользуясь (2.3.9), видим, что условие (2.3.6) эквивалентно традиционному смешанному граничному условию в регулярных граничных точках.

2.3.2 Принцип максимума для $\mathcal{WT}$-форм

Пусть $\mathcal{M}$ – компактное риманово многообразие с непустым краем, $\dim \mathcal{M} = n$, и пусть $w \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $\deg w = k$, $1 \le k \le n$, – дифференциальная форма класса $\mathcal{WT}_1$ на $\mathcal{M}$. Пусть θ, $\deg \theta = n - k$, – дополняющая форма к форме w.

Теорема 2.3.1 *Предположим, что существует дифференциальная форма $Z \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, $dZ = w$ на $\mathcal{M}$. Если выполнено хотя бы одно из соотношений* (2.3.1) *или* (2.3.4)*, то $\theta \equiv 0$ на $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Предположим, что имеет место (2.3.1). Положим $v = \theta$. Тогда (2.3.1) ведет к соотношению

$$\int\limits_{\mathcal{M}} w \wedge \theta = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}(-1)^{k(n-k)}(-1)^{k(n-k)} * (w \wedge \theta) &= (-1)^{k(n-k)} *^{-1} (w \wedge \theta) = \\ &= *^{-1}(w \wedge (-1)^{k(n-k)}\theta) = \\ &= *^{-1}(w \wedge *(*\theta)) = \langle w, *\theta \rangle,\end{aligned}$$

мы получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} w \wedge \theta = \int\limits_{\mathcal{M}} *(w \wedge \theta) * \mathbb{1} = \int\limits_{\mathcal{M}} \langle w, *\theta \rangle * \mathbb{1}.$$

Пользуясь (2.2.3), выводим

$$0 = \int\limits_{\mathcal{M}} w \wedge \theta \geq \nu_0 \int\limits_{\mathcal{M}} |\theta|^q * \mathbb{1}. \qquad (2.3.17)$$

Предположим, что выполнено граничное условие (2.3.4). Выберем $v = Z$. Тогда (2.3.4) дает

$$\int\limits_{\mathcal{M}} w \wedge \theta = 0.$$

Как и выше, приходим к неравенству (2.3.17), которое, в свою очередь, влечет, что $\theta \equiv 0$ на $\mathcal{M}$. $\square$

В порядке иллюстрации теоремы 2.3.1 рассмотрим примеры обобщенных решений $f(m) \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$ уравнения (2.2.18), подчиненного условию (2.2.12). Полагая $Z = f$, получаем

Следствие 2.3.1 *Предположим, что многообразие $\mathcal{M}$ компактно и его край $\partial\mathcal{M}$ не пуст. Если функция f удовлетворяет условию* (2.3.15) *или условию* (2.3.16), *то $f \equiv \text{const}$ на $\mathcal{M}$.*

2.3.3 Теорема Лиувилля

Пусть $\mathcal{M}$ – некомпактное многообразие p-параболического типа. Пусть w – дифференциальная форма (2.2.1) класса $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{M}$. Предположим, что существует форма $Z \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$, $dZ = w$ на $\mathcal{M}$. В данных предположениях справедливо высказывание.

Теорема 2.3.2 *Предположим, что*

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} |Z(m)| = M < \infty\,. \tag{2.3.18}$$

Если граница $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, то пусть форма Z удовлетворяет хотя бы одному из условий (2.3.1), (2.3.4). *Тогда $w(m) = 0$ для всех $m \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \ldots$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k = \mathcal{M}$ – исчерпание многобразия $\mathcal{M}$. Поскольку многообразие $\mathcal{M}$ параболично, то множество $\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}_k$ имеет p-параболический тип.

Фиксируем подобласть $H \subset\subset \mathcal{U}_1$. Зададим локально липшицеву функцию ϕ такую, что $\phi(m)|_H = 1$, $\phi(m)|_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{U}_k} = 0$. Предположим, что форма Z удовлетворяет условию (2.3.1). Пусть θ – дополняющая к w форма, как в (2.2.2). Форма $(\phi)^p\theta$ имеет компактный носитель и, выбирая в (2.3.1) форму $(\phi)^p\theta$, находим

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^p w \wedge \theta + (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathcal{M}} Z \wedge d((\phi)^p\theta) = 0.$$

Пользуясь теперь тем фактом, что $d\theta = 0$, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^p \langle w, *\theta\rangle * \mathbb{1} = p(-1)^k \int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^{p-1} \langle Z, *(d\phi \wedge \theta)\rangle * \mathbb{1}.$$

В силу условий (2.2.4) и (2.2.5), приходим к неравенству

$$\nu_1 \int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^p |w|^p * \mathbb{1} \leq p \int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^{p-1} |Z||d\phi||\theta| * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq p\nu_2 M \int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^{p-1} |\nabla\phi||w|^{p-1} * \mathbb{1}.$$

Таким образом, неравенство Гельдера влечет

$$\nu_1 \int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^p |w|^p * \mathbb{1} \le p\nu_2 M \Big(\int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^p |w|^p * \mathbb{1}\Big)^{(p-1)/p} \Big(\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla\phi|^p * \mathbb{1}\Big)^{1/p}$$

и, следовательно,

$$\Big(\frac{\nu_1}{\nu_2}\Big)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |\phi|^p |w|^p * \mathbb{1} \le (pM)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla\phi|^p * \mathbb{1}.$$

Замечая, что $\phi = 1$ на H, и переходя к точной нижней грани по всем ϕ, находим

$$\Big(\frac{\nu_1}{\nu_2}\Big)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |w|^p * \mathbb{1} \le (pM)^p \mathrm{cap}_p(H, \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}_k; \mathcal{M}). \qquad (2.3.19)$$

Предположим, что выполнено условие (2.3.4). Выберем $v = (\phi)^p Z$. Соотношение (2.3.4) теперь переписывается в виде

$$\int\limits_{\mathcal{M}} d((\phi)^p Z) \wedge \theta = \int\limits_{\mathcal{M}} p(\phi)^{p-1} d\phi \wedge Z \wedge \theta + (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^p w \wedge \theta = 0.$$

Теми же самыми аргументами как и выше, устанавливаем (2.3.19).

Полагая $k \to \infty$ в (2.3.19) и пользуясь параболичностью типа многообразия $\mathcal{M}$, заключаем, что $w(m) \equiv 0$ на $\mathcal{M}$. $\square$

Приведем специальную форму данной теоремы, являющуюся некоторым вариантом теоремы Лиувилля.

Следствие 2.3.2 *Пусть w – дифференциальная форма класса $\mathcal{WT}_2$ на некомпактном римановом многообразии $\mathcal{M}$ без края. Если многообразие имеет p-параболический тип и форма удовлетворяет условию* (2.3.18), *то $w(m) \equiv 0$.*

В случае непрерывных решений $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ уравнения (2.2.18), удовлетворяющих условиям (2.2.15), (2.2.16), имеем следующее утверждение.

Следствие 2.3.3 *Пусть $\mathcal{M}$ – некомпактное риманово многообразие p-параболического типа. Если граница $\partial\mathcal{M}$ не пуста и*

$$\limsup_{m\to m_0} f(m) \le 0, \quad \textit{при всех} \quad m_0 \in \partial\mathcal{M}, \tag{2.3.20}$$

то $f(m) \le 0$ всюду на $\mathcal{M}$.

Доказательство. Предположим, что $f(a) > 0$ при некотором $a \in \mathcal{M}$. Фиксируем компоненту связности $\mathcal{M}_a$ множества

$$\{m \in \mathcal{M} : f(m) > f(a)\}.$$

Функция $f(m)-f(a)$ удовлетворяет предположению (2.3.15). Согласно следствию 2.3.1 множество $\mathcal{M}_a$ не может быть компактным. Пользуясь теоремой 2.3.2 мы вправе заключить тогда, что $f(m) = f(a)$ всюду на $\mathcal{M}_a$. Противоречие с определением $\mathcal{M}_a$. □

2.3.4 Рост интеграла энергии

Пусть $\mathcal{M}$ – некомпактное риманово многообразие, $\dim\mathcal{M} = n$. Рассмотрим класс $\mathcal{F}$ дифференциальных форм $Z \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, $\deg Z = k-1$, таких, что формы $dZ = w$ удовлетворяют условиям (2.2.1) и принадлежат классу $\mathcal{WT}_1$. Пусть $\theta \in L^q_{\mathrm{loc}}$ – форма, удовлетворяющая предположению (2.2.2) и дополнительная к w.

Если граница $\partial\mathcal{M}$ не пуста, то будем предполагать, что форма Z подчинена на $\partial\mathcal{M}$ некоторому граничному условию B. В случае, рассматриваемом ниже, это граничное условие может быть любым из условий (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4), (2.3.6). Обозначим через $\mathcal{F}_B(\mathcal{M})$ множество форм Z, $dZ \in \mathcal{WT}_1$, удовлетворяющих граничному условию B на $\partial\mathcal{M}$. В частности, ниже мы оперируем с классами $\mathcal{F}_D$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_N$ и $\mathcal{F}_{DN}$ форм, соответствующих граничным условиям (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4), (2.3.6), соответственно.

Фиксируем локально липшицеву функцию исчерпания $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$. Пусть $\tau \in (0, h_0)$ – произвольно и пусть $B_h(\tau)$ – h-шар, $\Sigma_h(\tau)$ – ограничивающая его сфера.

Вводим величину $\varepsilon(\tau)$, полагая

$$\varepsilon(\tau;\mathcal{F}_B)=\inf\frac{\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|dZ|^p|\nabla h|^{-1}d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}\langle Z,*\theta\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big|}\qquad(2.3.21)$$

где точная нижняя грань берется по всем $Z\in\mathcal{F}_B(\mathcal{M})$.

В описанных предположениях выполнена

Теорема 2.3.3 *Предположим, что форма $Z\in\mathcal{F}_B(\mathcal{M})$ удовлетворяет одному из граничных условий* (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4) *или* (2.3.6). *Тогда для почти всех $\tau\in(0,h_0)$ и произвольного τ_0 выполнено*

$$\frac{d}{d\tau}\Big(I(\tau)\exp\Big\{-\nu_0\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(t;\mathcal{F}_B)dt\Big\}\Big)\geq 0,\qquad(2.3.22)$$

где

$$I(\tau)=\int\limits_{B_h(\tau)}|w|^p*\mathbb{1}.$$

В частности, при всех $\tau_1<\tau_2$ имеет место неравенство

$$I(\tau_1)\leq I(\tau_2)\exp(-\nu_0\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\varepsilon(t;\mathcal{F}_B)dt).\qquad(2.3.23)$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство

$$\frac{d}{d\tau}I(\tau)\geq\nu_0\,I(\tau)\varepsilon(\tau).\qquad(2.3.24)$$

Интегрируя по всем поверхностям уровня функции $h(m)$, на основании формулы Кронрода – Федерера можно записать

$$I(\tau)=\int\limits_0^{\tau}dt\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|w|^p\frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{|\nabla h|},$$

и, тем самым, для почти всех $\tau \in (0, h_0)$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} I(\tau) = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |w|^p \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{|\nabla h|}. \tag{2.3.25}$$

В соответствии с (2.2.3) получаем

$$I(\tau) = \int\limits_{B_h(\tau)} |w|^p * \mathbb{1} \le \nu_0^{-1} \int\limits_{B_h(\tau)} \langle w, *\theta \rangle * \mathbb{1} =$$

$$= \nu_0^{-1} \int\limits_{B_h(\tau)} w \wedge \theta = \nu_0^{-1} \int\limits_{B_h(\tau)} dZ \wedge \theta.$$

Однако, форма Z удовлетворяет одному из условий (2.3.1), (2.3.2) или (2.3.4), а потому

$$\int\limits_{B_h(\tau)} dZ \wedge \theta = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} Z \wedge \theta.$$

Тем самым, мы получаем

$$I(\tau) \le \nu_0^{-1} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Далее мы видим, что

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |w|^p \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{|\nabla h|} \ge \varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B) \Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \Big|.$$

Объединяя найденные выше неравенства, находим

$$I(\tau) \le \frac{\nu_0^{-1}}{\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B)} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |w|^p \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{|\nabla h|}.$$

Данное неравенство совместно с соотношением (2.3.25) влечет

$$I(\tau) \le \frac{\nu_0^{-1}}{\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B)} \frac{d}{d\tau} I(\tau).$$

Таким образом, мы приходим к нужному заключению (2.3.24). $\square$

Нам потребуются также другие оценки интеграла энергии. Докажем первую из таких оценок. Обозначим через $\mathcal{F}(B_h(\tau))$ множество всех дифференциальных форм со свойствами

$$Z_0 \in W^{1,p}_{\text{loc}}(B_h(\tau)), \quad \deg Z_0 = k-1, \quad dZ_0 = 0\,. \tag{2.3.26}$$

Для почти всех $\tau \in (0, h_0)$ и для произвольной локально липшицевой функции ϕ имеет место формула

$$\int_{\Sigma_h(\tau)} \phi Z_0 \wedge \theta = \int_{B_h(\tau)} d\phi \wedge Z_0 \wedge \theta. \tag{2.3.27}$$

Теорема 2.3.4 *Если дифференциальная форма* $Z \in \mathcal{F}_B(\mathcal{M})$, $dZ \in \mathcal{WT}_1$, *удовлетворяет граничному условию* (2.3.1), (2.3.4) *или* (2.3.6), *то при всех* $\tau_1 < \tau_2$ *и произвольной формы* $Z_0 \in \mathcal{F}(B_h(\tau_2))$ *выполнено*

$$\nu_0 \int\limits_{B_h(\tau_1)} |dZ|^p * \mathbb{1} \le \frac{p}{\tau_2 - \tau_1} \int\limits_{B_h(\tau_2)\setminus B_h(\tau_1)} |\nabla h||(Z - Z_0) \wedge \theta| * \mathbb{1}. \tag{2.3.28}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \in B_h(\tau_1), \\[2ex] \dfrac{\tau_2 - h(m)}{\tau_2 - \tau_1} & \text{при } m \in B_h(\tau_2) \setminus B_h(\tau_1), \\[2ex] 0 & \text{при } m \in \mathcal{M} \setminus B_h(\tau_2). \end{cases}$$

Предположим, что форма Z удовлетворяет предположению (2.3.1). Форма $(\phi)^p Z$ имеет компактный носитель и, полагая в (2.3.1) форму $v = (\phi)^p Z \wedge \theta$, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^p w \wedge \theta + (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathcal{M}} Z \wedge d(\phi)^p \wedge \theta = 0,$$

или
$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p \langle w, *\theta\rangle \, * \mathbb{1} = p(-1)^k \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^{p-1} \, Z \wedge d\phi \wedge \theta.$$

Функция $(\phi)^p$ локально липшицева на $\overline{B}_h(\tau_2)$. Тем самым, на основании (2.3.27) имеем
$$\int\limits_{\partial\mathcal{M}\cap B_h(\tau_2)} (\phi)^p \, Z_0 \wedge \theta = 0.$$

Отсюда находим
$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} d(\phi)^p \wedge Z_0 \wedge \theta + \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p \, dZ_0 \wedge \theta + \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p \, Z_0 \wedge d\theta =$$
$$= \int\limits_{\partial B_h(\tau_2)} (\phi)^p \, Z_0 \wedge \theta = \int\limits_{\Sigma_h(\tau_2)} (\phi)^p \, Z_0 \wedge \theta + \int\limits_{\partial\mathcal{M}\cap B_h(\tau_2)} (\phi)^p \, Z_0 \wedge \theta = 0.$$

Следовательно,
$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p \langle w, *\theta\rangle \, * \mathbb{1} = p\,(-1)^k \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^{p-1}(Z - Z_0) \wedge d\phi \wedge \theta,$$

что согласно (2.2.3) влечет
$$\nu_0 \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p |w|^p * \mathbb{1} \le \frac{p}{\tau_2 - \tau_1} \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^{p-1} \, |(Z - Z_0) \wedge \theta| \, |\nabla h| * \mathbb{1}. \quad (2.3.29)$$

Замечая, что $\phi(m) = 1$ при $m \in B_h(\tau_1)$ и $\phi(m) = 0$ при $m \in \mathcal{M} \setminus B_h(\tau_2)$, выводим
$$\nu_0 \int\limits_{B_h(\tau_1)} |w|^p * \mathbb{1} \le \frac{p}{\tau_2 - \tau_1} \int\limits_{B_h(\tau_2)\setminus B_h(\tau_1)} (\phi)^{p-1} |\nabla h| \, |(Z - Z_0) \wedge \theta| * \mathbb{1}.$$

Так как $|\phi| \le 1$, то неравенство (2.3.28) действительно имеет место.

Предположим, что форма Z удовлетворяет условию (2.3.4). Выберем $v = (\phi)^p Z$ и заметим, что

$$v|_{\Sigma_h(\tau_2)} = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p\, w \wedge \theta = - \int\limits_{B_h(\tau_2)} d(\phi)^p \wedge Z \wedge \theta = p\,(-1)^k \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^k Z \wedge d\phi \wedge \theta.$$

Дальнейшие аргументы в точности те же самые, что приведенные выше.

Предположим, то форма Z удовлетворяет смешанному граничному условию (2.3.6). Замечая, что

$$(\phi)^p|_{\Sigma_h(\tau_2)} = 0,$$

находим

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^p\, w \wedge \theta = (-1)^n \int\limits_{B_h(\tau_2)} Z \wedge \theta \wedge d(\phi)^p = p\,(-1)^{2n-k} \int\limits_{B_h(\tau_2)} (\phi)^{p-1}\, Z \wedge d\phi \wedge \theta.$$

Приведенные выше аргументы завершают доказательство теоремы. □

Могут быть получены также оценки интеграла энергии для формы Z без использовния дополняющей формы θ для $dZ = w$. Одна такая оценка дается, например, следующей теоремой.

Теорема 2.3.5 *Если дифференциальная форма Z, $dZ \in \mathcal{WT}_2(\mathcal{M})$, удовлетворяет на границе $\partial\mathcal{M}$ одному из условий* (2.3.1), (2.3.4) *или* (2.3.6), *то при всех $\tau_1 < \tau_2$ и всякой формы $Z_0 \in \mathcal{F}(B_h(\tau_2))$ выполняется*

$$\int\limits_{B_h(\tau_1)} |dZ|^p * \mathbb{1} \le \Big(\frac{p\nu_2}{(\tau_2 - \tau_1)\nu_1} \Big)^p \int\limits_{B_h(\tau_2)\setminus B_h(\tau_1)} |\nabla h|^p |Z - Z_0|^p * \mathbb{1}. \quad (2.3.30)$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (2.3.29), ранее полученным в процессе доказательства теоремы 2.3.4. Оценим интеграл в правой части (2.3.29). В силу (2.2.5), имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^{p-1} |\nabla h| |(Z - Z_0) \wedge \theta * \mathbb{1} \le \int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^{p-1} |\nabla h| |Z - Z_0| |\theta| * \mathbb{1}$$

$$\leq \nu_2 \int\limits_{\mathcal{M}} (\phi)^{p-1} |\nabla h| |Z - Z_0| |w|^{p-1} * \mathbb{1}$$

$$\leq \nu_2 \Big(\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla h|^p |Z - Z_0|^p * \mathbb{1} \Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{\mathcal{M}} \phi^p |w|^p * \mathbb{1} \Big)^{(p-1)/p}.$$

На основании (2.3.29) получаем

$$\Big(\frac{\nu_1}{\nu_2}\Big)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |w|^p * \mathbb{1} \leq \Big(\frac{p}{\tau_2 - \tau_1}\Big)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla h|^p |Z - Z_0|^p * \mathbb{1}.$$

Учитывая, что $\phi = 1$ на $B_h(\tau_1)$ и $\phi = 0$ на $\mathcal{M} \setminus B_h(\tau_2)$, легко удостоверяемся в справедливости (2.3.30). $\square$

2.3.5 Теоремы типа Фрагмена – Линделефа

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное некомпактное риманово многообразие с краем или без края и пусть $w \in \mathcal{WT}_2$ – дифференциальная форма как в (2.2.1), $\deg w = k$, и θ – дополняющая форма как в (2.2.2).

Предположим, что существует дифференциальная форма $Z \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, для которой $dZ = w$. Если край $\partial\mathcal{M}$ не пуст, то мы предполагаем также, что Z удовлетворяет граничному условию Дирихле (2.3.1), (2.3.2), смешанному граничному условию (2.3.6) либо условию Неймана (2.3.4).

Зафиксируем локально липшицеву функцию исчерпания $h(m) : \mathcal{M} \to (0, h_0)$. Предположим, что, как и выше,

$$I(\tau; Z) = \int\limits_{B_h(\tau)} |dZ|^p * \mathbb{1}$$

и

$$\mu(\tau; Z) = \inf \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h| \, |(Z - Z_0) \wedge \theta| * \mathbb{1},$$

$$m(\tau; Z) = \inf \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h|^p \, |Z - Z_0|^p * \mathbb{1},$$

где точная нижняя грань берется по всем замкнутым формам Z_0, подчиненным условиям (2.3.26), (2.3.27) на $B_h(\tau)$.

Следующее утверждение представляет собой обобщение классического принципа Фрагмена – Линделефа для голоморфных функций.

Теорема 2.3.6 *Предположим, что дифференциальная форма Z, $dZ \in \mathcal{WT}_2(\mathcal{M})$, удовлетворяет одному из граничных условий* (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4) *или* (2.3.6). *Тогда имеет место альтернатива: или форма $dZ = 0$ всюду на многообразии $\mathcal{M}$, или для любого $\tau_0 \in (0, \infty)$ выполнено*

$$\liminf_{\tau\to\infty} I(\tau; Z)\, \exp\Big\{-\nu_0 \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon(t; \mathcal{F}_B)\, dt\Big\} > 0; \tag{2.3.31}$$

$$\liminf_{\tau\to\infty} \mu(\tau; Z)\, \exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon(t; \mathcal{F}_B)\, dt\Big\} > 0, \tag{2.3.32}$$

$$\liminf_{\tau\to\infty} m(\tau; Z)\, \exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon(t; \mathcal{F}_B)\, dt\Big\} > 0. \tag{2.3.33}$$

Доказательство. Свойство (2.3.31) вытекает из (2.3.23) и представлено здесь только для полноты.

Согласно (2.3.23) и (2.3.28), для всякого $\tau > \tau_0$ выполняется

$$I(\tau_0) \le I(\tau)\, \exp\Big\{-\nu_0 \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon(t)\, dt\Big\} \le$$

$$\le p\, \nu_0^{-1} \int\limits_{B_h(\tau+1)\setminus B_h(\tau)} |\nabla h|\, |(Z - Z_0)\wedge\theta| * \mathbb{1} \;\cdot\; \exp\Big\{-\nu_0 \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon(t)\, dt\Big\}.$$

По теореме 2.2.1 класс $\mathcal{WT}_2 \subset \mathcal{WT}_1$ с постоянной

$$\nu_0 = \nu_1^{-1} \nu_2^{p/(p-1)}. \tag{2.3.34}$$

Таким образом, мы получаем

$$I(\tau_0) \le p\,\nu_0^{-1}\,\mu(\tau;Z)\,\exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(t)\,dt\Big\}.$$

Аналогично, пользуясь (2.3.30), находим

$$I(\tau_0) \le \Big(\frac{\nu_2}{\nu_1}\Big)^p\,p^p\,m(\tau;Z)\,\exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(t)\,dt\Big\}.$$

Если теперь предположить, что форма $w \not\equiv 0$, то $I(\tau_0) > 0$ при некотором $\tau_0 \in (0, h_0)$. Отсюда легко выводим (2.3.32) и (2.3.33). $\square$

2.3.6 Задача Данжуа – Карлемана – Альфорса

Имеется другое применение полученных выше оценок интеграла энергии, связанное с классической теоремой Данжуа – Карлемана – Альфорса о числе асимптотических мест целой функции данного порядка. Ниже данная теорема интерпретируется как утверждение о связях между числом финитных форм класса $\mathcal{WT}_2$, расположенных на многообразии $\mathcal{M}$ и имеющих заданную скорость роста их интегралов энергии.

Пусть $\mathcal{M}$ есть n-мерное некомпактное риманово многообразие с краем или без края. Зафиксируем локально липшицеву функцию исчерпания $h(m) : \mathcal{M} \to (0, \infty)$ многообразия $\mathcal{M}$.

Предположим, что на $\mathcal{M}$ имеется $L \ge 1$ взаимно непересекающихся областей $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_L$ таких, что $\mathcal{O}_i \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$, если граница $\partial\mathcal{M}$ не пустая. Предположим также, что на каждой из областей $\mathcal{O}_i$ задана дифференциальная форма Z_i с непрерывными коэффициентами, обладающая свойствами:

$\deg Z_i = k - 1, \quad dZ \not\equiv 0,$

$dZ_i = w \in \mathcal{WT}_2$ со структурными постоянными p, ν_1, ν_2, не зависящими от $i = 1, 2, \ldots, L$,

Z_i удовлетворяет на $\partial\mathcal{O}_i$ нулевому граничному условию (2.3.2).

Определим форму Z на $\mathcal{M}$ полагая $Z|_{\mathcal{O}_i} = Z_i$ и $Z = 0$ на $\mathcal{M} \setminus \cup_{i=1}^{L}\mathcal{O}_i$. В соответствии с теоремой 2.3.1 каждая из областей $\mathcal{O}_i$ имеет некомпактное замыкание. При этом в соответствии с теоремой 2.3.6 "узость" пересечения областей $\mathcal{O}_i$ с h-сферами $\Sigma_h(t)$ при $t \to \infty$ влияет на скорость роста интеграла энергии для формы Z_i. Теорема Данжуа – Карлемана – Альфорса ниже интерпретируется как утверждение о связи между числом L взаимно непересекающихся областей O_i на $\mathcal{M}_0$ и скоростью роста энергии формы Z (или самой формы Z) относительно функции исчерпания $h(m)$ многообразия $\mathcal{M}$. Мы покажем, что данная формулировка проблемы содержит, в частности, классическую задачу Данжуа – Карлемана – Альфорса для голоморфных функций в комплексной плоскости. В случае гармонических функций в $\mathbb{R}^n$ историю вопроса см. в монографии У. Хеймана, П. Кеннеди [115].

Введем некоторые обозначения. Зададим открытое множество $D \subset \mathcal{M}$ с некомпактным замыканием и предположим, что сужение формы Z на D удовлетворяет предположению (2.3.2).

Функция $h|_D(m) : D \to (0, \infty)$ есть функция исчерпания D. Фиксируем h-шар $B_h(\tau)$. Вариационная проблема (2.3.21) на классе форм Z, удовлетворяющих граничному условию (2.3.2), определяет характеристику

$$\varepsilon(t; D) = \varepsilon(t; \mathcal{F}_0).$$

Следуя [72], введем N-средние

$$E(t; N) = \inf \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(t; D_k) \tag{2.3.35}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным разбиениям множества D на N не налегающих друг на друга открытых множеств

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N\,.$$

Отметим следующее простое утверждение.

Лемма 2.3.1 *Пусть $D_1 \subset D_2$ – произвольные неограниченные открытые подмножества $\mathcal{M}$ и пусть $t \in (0, \infty)$ таково, что $\Sigma_h(t) \cap D_1 \neq \emptyset$. Тогда*

$$\varepsilon(t; D_2) \leq \varepsilon(t; D_1). \tag{2.3.36}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что каждая пара форм Z, Z_0, допустимая в вариационной проблеме (2.3.21) для D_1, является также допустимой в этой проблеме для D_2. □

На основании (2.3.36) получаем

$$\varepsilon(t; D) \leq E(t; N) \quad \text{при всех} \quad N \geq 1. \tag{2.3.37}$$

Отметим более общее утверждение о монотонности N-средних.

Лемма 2.3.2 *Для произвольного $N > 1$ выполнено*

$$E(t; N+1) \geq E(t; N). \tag{2.3.38}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное семейство открытых подмножеств $\{D_k\}, k = 1, 2, \ldots, N+1$, допустимое при вычислении точной нижней грани в (2.3.35). Не трудно видеть, что

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon(t; D_k) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1, j\neq k}^{N+1} \varepsilon(t; D_j)\Big).$$

Так как

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1, j\neq k}^{N+1} \varepsilon(t; D_j) \geq E(t; N),$$

то

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon(t; D_k) \geq E(t; N)$$

и лемма доказана. □

Следующая теорема доставляет решение описанной выше задачи, касающейся связи между числом L финитных форм на $\mathcal{M}$, и скоростью роста суммарной энергии этих форм либо суммы их L^p-норм на h-шаре $B_h(\tau)$.

Теорема 2.3.7 *Предположим, что при некотором $N = 1, 2, \ldots$ многообразие $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty} E(t, N)dt = \infty. \tag{2.3.39}$$

Тогда если дифференциальная форма Z, $dZ \in \mathcal{WT}_2(\mathcal{M})$, такова, что

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{h(m)<\tau} |dZ|^p * \mathbb{1}\, \exp\left\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int^{\tau} E(t; N)\, dt\right\} = 0, \tag{2.3.40}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|\,|Z\wedge\theta| * \mathbb{1} \exp\left\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int^{\tau} E(t;N)dt\right\} = 0, \tag{2.3.41}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|^p |Z|^p * \mathbb{1} \exp\left\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int^{\tau} E(t;N)dt\right\} = 0\,, \tag{2.3.42}$$

то $L < N$.

Доказательство. Предположим, что существуют N взаимно непересекающихся подобластей $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_N$ множества $\mathcal{M}_0$ и формы Z_i, определенные на $\mathcal{O}_i$ с описанными выше свойствами. Положим

$$d(\mathcal{O}_k) = \inf_{m\in\mathcal{O}_k} h(m), \quad d = \max_{1\le k\le N} d(\mathcal{O}_k).$$

Фиксируем $\tau_0 > d$. Пользуясь неравенством (2.3.23), на основании теоремы 2.3.3 с (2.3.34) для произвольного $k = 1, 2, \ldots, N$ и всякого $\tau > \tau_0$ имеем

$$I_k(\tau_0)\exp\left\{\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon_k(t)\,dt\right\} \le I_k(\tau),$$

где

$$I_k(\tau) = \int\limits_{\mathcal{O}_k\cap B_h(\tau)} |dZ_k|^p * \mathbb{1}, \quad \varepsilon_k(\tau) = \varepsilon(\tau;\mathcal{O}_k).$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\min_{1\le k\le N} I_k(\tau_0)\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon_k(t)\,dt\right\} \le I(\tau),$$

где

$$I(\tau) = \int\limits_{B_h(\tau_0)} |dZ|^p * \mathbb{1}.$$

Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, находим

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon_k(t)\,dt\right\}\geq\prod_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1 N}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon_k(t)\,dt\right\}$$

и, далее,

$$\min_{1\leq k\leq N}I_k(\tau_0)N\exp\left\{\frac{1}{N}\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(t)\,dt\right\}\leq I(\tau).$$

Области $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\ldots,\mathcal{O}_N$ взаимно не налегают. Таким образом, при всех $t>\tau_0$ имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(t)\geq E(t;N).$$

Предыдущее неравенство теперь дает

$$\min_{1\leq k\leq N}I_k(\tau_0)N\exp\left\{\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}E(t;N)dt\right\}\leq I(\tau).$$

Чтобы оценить интеграл $I(\tau)$ используем неравенства (2.3.28), (2.3.30) и тогда

$$\min_{1\leq k\leq N}I_k(\tau_0)\leq C_1\int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1}|\nabla h||Z\wedge\theta|*\mathbb{1}\exp\left\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}E(t;N)dt\right\}$$

или

$$\min_{1\leq k\leq N}I_k(\tau_0)\leq C_2\int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1}|\nabla h|^p|Z|^p*\mathbb{1}\ \exp\left\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}E(t;N)dt\right\},$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные.

На основании соотношений (2.3.39)–(2.3.42), примененных к форме Z, для некоторого k, $1 \le k \le N$, имеем $I_k(\tau_0) = 0$. Тогда $dZ_k(m) \equiv 0$ на

$$\mathcal{O}_k \cap B_h(\tau_0)\,.$$

Так как мы выбирали $\tau_0 > d$ произвольно, мы вправе заключить, что как минимум на одной из компонент $\mathcal{O}_k$, $dZ_k \equiv 0$. Противоречие. $\square$

Глава 3

Квазиконформно плоские поверхности

Ниже описываются некоторые глобальные свойства локально квазиконформно плоских поверхностей в римановых многообразиях. Основные результаты опубликованы в [80].

3.1 Постановка задачи

Пусть $\mathcal{X}$ – $n-$мерное риманово C^3-многообразие без края, которое предполагается связным некомпактным и ориентируемым. Пусть $d(x', x'')$ – геодезическое расстояние между точками $x', x'' \in \mathcal{X}$. Используем обозначения

$$B_{\mathcal{X}}(a,t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a,x) < t\}, \quad S_{\mathcal{X}}(a,t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a,x) = t\}$$

для геодезического шара и геодезической сферы, соответственно. Здесь $a \in \mathcal{X}$ – центр шара или сферы, $t > 0$ – радиус.

Далее полагаем

$$B(a,t) = B_{\mathbb{R}^n}(a,t) \quad \text{и} \quad S(a,t) = S_{\mathbb{R}^n}(a,t)\,.$$

Положим

$$R_a = \liminf d(a, x_n)\,,$$

где нижний предел берется по всем последовательностям $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$, не имеющим точек накопления в $\mathcal{X}$.

Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – точка в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем $1 \le k \le n-1$ и рассмотрим k-мерную плоскость

$$\Pi_0^k = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \quad y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\}\,.$$

Если $k = n - 1$, то гиперплоскость Π_0^{n-1} разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства, которые далее обозначаются символами

$$\mathbb{R}^n_+ = \{y : \quad y_n > 0\} \ \text{ и } \ \mathbb{R}^n_- = \{y : \quad y_n < 0\}\,.$$

Пусть Π^k – k-мерная поверхность в $\mathcal{X}$, понимаемая в следующем смысле: существует гомеоморфное отображение $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\varphi(\Pi^k) = \Pi_0^k\,.$$

Зафиксируем точку $a \in \Pi$ и R, $0 < R < R_a$. Обозначим через $\Pi^k(a, R)$ компоненту связности множества $\Pi^k \cap B_{\mathcal{X}}(a, R)$, содержащую точку a. Будем говорить, что поверхность Π^k является *локально квазиконформно плоской* при $k \geq 2$ и, соответственно, *локально квазиконформно прямой* при $k = 1$, если для всякой точки $a \in \Pi^k$ и всякого R, $0 < R < R_a$, существует квазиконформное отображение $f : B_{\mathcal{X}}(a, R) \to B(0, 1)$ такое, что $f(\Pi^k(a, R)) \subset \Pi_0^k$.

Целью данной главы является исследование геометрических свойств квазиконформно плоских поверхностей в римановых многообразиях. С качественной точки зрения свойства таких поверхностей в многообразии мало отличаются от свойств поверхностей в евклидовом пространстве. Проблема начинается в случае, когда мы пытаемся описать эти свойств в равномерных (не зависящих от точки) терминах и учесть, что многообразие само по себе "кривое".

Современное состояние проблемы и близкие вопросы для случая отображений $\mathbb{R}^n$ см. в [160], [121, глава 14], [57], [5], [6], [23], [202], [52], [39] и цитированной там литературе. В частности, в случае $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ хорошо известен следующий критерий для квазиконформно прямых линий [125]. *Кривая $\Pi^1 \subset \mathbb{R}^2$ является квазиконформно прямой тогда и только тогда, когда существует постоянная $C = C(K)$ такая, что*

$$\left|\frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right| \leq C \qquad \zeta_1, \zeta_3, \zeta_2 \in \Pi^1\,.$$

Квазиконформно плоские гиперповерхности в римановых многообразиях рассматривались в [80]. Ниже изучается общий случай поверхностей $\Pi^k \subset \mathcal{X}$, $1 \leq k \leq n - 1$.

3.2 Свойства отображения

В разделе описываются необходимые для дальнейшего свойства отображений f. В частности, устанавливается их связь с дифференциальными уравнениями эллиптического типа, доказываются лемма Лебега – Куранта, неравенство Гарнака, D-свойство.

3.2.1 Связь с уравнениями

Пусть $\mathcal{X}$ – риманово многообразие и пусть

$$A : T(\mathcal{X}) \to T(\mathcal{X})$$

– сохраняющее слои отображение, определенное почти всюду на касательном расслоении $T(\mathcal{X})$ многообразия $\mathcal{X}$. Мы предполагаем выполненными условия:

(i) для почти всех $x \in \mathcal{X}$ отображение A непрерывно на слоях T_x, т.е. для почти всех $x \in \mathcal{X}$ отображение $A(x,\cdot) : T_x \to T_x$ определено и непрерывно;

(ii) отображение $x \to A(X)$ измеримо для всех измеримых векторных полей X;

(iii) для почти всех $x \in \mathcal{X}$ и всех $\xi \in T_x$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\nu_1|\xi|^n \le \langle \xi, A(x,\xi)\rangle \,, \tag{3.2.1}$$

$$|A(x,\xi)| \le \nu_2|\xi|^{n-1} \,, \tag{3.2.2}$$

$$A(x,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{n-2}A(x,\xi) \,, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \,, \tag{3.2.3}$$

где ν_1, $\nu_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Пусть $\nu = \nu_2/\nu_1$. Ясно, что $\nu \ge 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{div} A(x,\nabla h) = 0 \,. \tag{3.2.4}$$

Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$ является в $\mathcal{X}$ *обобщенным решением уравнения* (3.2.4) [1], если для всякой функции

[1]Имеет смысл сравнить с соответствующим определением раздела 2.2.2.

$\phi(x) \in W^{1,n}(\mathcal{X})$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\phi \subset \mathcal{X}$ выполнено:

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \langle \nabla\phi, A(x, \nabla h)\rangle \ * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = 0\,. \tag{3.2.5}$$

Функция f класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$ является *субрешением* (3.2.4) в $\mathcal{X}$, если

$$\operatorname{div}\, A(x, \nabla f) \geq 0 \tag{3.2.6}$$

слабо в $\mathcal{X}$, т.е.

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla f)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq 0\,, \tag{3.2.7}$$

где $\varphi \in W^{1,n}(\mathcal{X})$ есть произвольная неотрицательная функция с компактным носителем в $\mathcal{X}$.

Пусть $a \in \mathcal{X}$ – фиксированная точка и $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – K-квазиконформное отображение. Введем в рассмотрение функцию

$$h(x) = \ln |f(x) - f(a)|\,.$$

Имеет место

Теорема 3.2.1 *Функция $h(x)$ является в $\mathcal{X} \setminus \{a\}$ обобщенным решением некоторого уравнения вида* (3.2.4) *со структурными ограничениями* (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) *и постоянными $\nu_1 = K^{1-n}$, $\nu_2 = K^{n-1}$.*

Доказательство. Данное утверждение можно получить доказав предварительно общую теорему о квазиконформных отображениях многообразий как экстремалях интегралов типа интеграла Дирихле (см. доказательство теоремы 5.1 в [99] для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$). Мы воспользуемся здесь альтернативным методом, базирующимся на связях квазиконформных отображений с дифференциальными формами. Прежде всего для сокращения записи договоримся считать, что $f(a) = 0$. Рассмотрим $(n-1)$-форму

$$\theta(y) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i\, dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_n\,,$$

где символ $\widehat{\ }$ над выражением означает, что оно пропускается.

Легко убедиться, что эта форма замкнута. Действительно,

$$\begin{aligned}
d\theta \ &= -n \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i dy_i\right) \wedge \\
&\wedge \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_n\right) + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} dy_i \wedge \, dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_n = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}} \Big(-n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} y_i^2 \, dy_i \wedge \, dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_n + \\
&+ n(-1)^{n+1} (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\Big) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}} \Big(-n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} y_i^2 \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_i \wedge \ldots \wedge dy_n + \\
&+ n(-1)^{n+1} (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\Big) = 0 \, .
\end{aligned}$$

Индуцированная $(n-1)$-форма $\theta^*(x) = \theta(f(x))$ имеет коэффициенты класса $L^n_{\text{loc}}(\mathcal{X})$. Покажем, что θ^* является слабо замкнутой в смысле определения 2.1.1, и, тем самым, для произвольной n-формы β с компактным носителем $\operatorname{supp} \beta \subset \mathcal{X}$ и коэффициентом класса $W^{1,n/(n-1)}(\mathcal{X})$ выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \langle \theta^*, \delta \, \beta \rangle \, * \, \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = 0 \, . \tag{3.2.8}$$

Здесь

$$\delta\beta = (-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta \, .$$

Ясно, что в качестве n-форм β достаточно брать C^2-формы с компактными носителями. Аппроксимируем вектор-функцию $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ последовательностью C^2-гладких вектор-функций $f^k : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, сходящейся по $W^{1,n}$-норме на подобласти D' с компактным замыканием $\overline{D'} \subset \mathcal{X}$, $\operatorname{supp} \beta \subset D'$.

Пусть $\theta^*_k = \theta(f^k(x))$. Мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{X}} d\theta^*_k \wedge *\beta = \int\limits_{\mathcal{X}} d(\theta^*_k \wedge *\beta) + \\ +(-1)^n \int\limits_{\mathcal{X}} \theta^*_k \wedge d * \beta\,.$$

Так как форма β имеет компактный носитель, то по формуле Стокса первый из интегралов в правой части обращается в нуль. Отсюда,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} d\theta^*_k \wedge *\beta = (-1)^n \int\limits_{\mathcal{X}} \theta^*_k \wedge * *^{-1} d * \beta = \\ = - \int\limits_{\mathcal{X}} \theta^*_k \wedge *\delta\beta = - \int\limits_{\mathcal{X}} \langle \theta^*_k, \delta\beta \rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Так как $d\big(\theta(f^k)\big) = \big(d\theta\big)(f^k)$, то замкнута и каждая из форм θ^*_k. Это влечет справедливость соотношения (3.2.8) при всяком $k = 1, 2, \ldots$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь сходимостью $f_k \to f$ по $W^{1,n}$-норме, заключаем о справедливости (3.2.8) для вектор-функции f и произвольной n-формы β. Тем самым, слабая замкнутость формы $\theta^*(y)$ доказана.

По определению, дифференциальная форма $w \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$, $\deg w = 1$, принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{X}$, если существует слабо замкнутая $(n-1)$-форма $\phi \in L^{\frac{n}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$, $\deg \phi = n - 1$, такая, что почти всюду на $\mathcal{X}$ выполнено

$$\nu'_1\, |w|^n \le \langle w, *\phi \rangle \quad \text{и} \quad |\phi| \le \nu'_2\, |w|^{n-1} \tag{3.2.9}$$

с некоторыми постоянными ν'_1, $\nu'_2 > 0$.

Покажем, что 1-форма $dh = d\, \ln |f(x)|$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ в $\mathcal{X} \setminus \{a\}$. Выберем $\phi = \theta^*$. Нам необходимо проверить условия (3.2.9), которые в данном случае принимают вид

$$\nu'_1\, |dh|^n \le \langle dh, *\theta^* \rangle \quad \text{и} \quad |\theta^*| \le \nu'_2\, |dh|^{n-1}\,. \tag{3.2.10}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} |dh|^2 &= \tfrac{1}{|f|^4}\left\langle \textstyle\sum_{i=1}^n f_i\, df_i, \sum_{i=1}^n f_i\, df_i \right\rangle = \\ &= |f|^{-4} \textstyle\sum_{i,j=1}^n \langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle\, f_i\, f_j\,. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Воспользуемся соотношением

$$\langle \alpha, \beta\rangle = *^{-1}(\alpha\wedge *\beta)\,,$$

справедливым для произвольной пары форм одинаковой степени. Находим

$$\langle dh, *\theta^*\rangle = |f|^{-(n+2)} \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+n} f_i\, f_j\, \langle df_i\,,\, *\big(df_1\wedge\ldots\wedge \widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n\big)\rangle$$

$$= |f|^{-n}\, J(x,f)\,. \tag{3.2.12}$$

Далее нам необходима следующая формула для вычисления скалярного произведения двух простых k-форм:

$$\langle \phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_k,\, \psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k\rangle = \det\,\big(\langle\phi_i,\psi_j\rangle\big)_{\substack{i=1,\ldots,k\\ j=1,\ldots,k}}\,.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} |\theta^*|^2 &= |f|^{-2n} \textstyle\sum_{i,j=1}^n f_i\, f_j \times \\ &\times\langle df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n,\, df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n\rangle = \\ &= |f|^{-2n} \textstyle\sum_{i,j=1}^n f_i\, f_j \det\,\big(\langle df_p, df_q\rangle\big)_{\substack{p=1,\ldots,\widehat{i},\ldots,n\\ q=1,\ldots,\widehat{j},\ldots,n}} = \\ &= |f|^{-2n} \textstyle\sum_{i,j=1}^n f_i\, f_j \det\,\big(\langle \nabla f_p, \nabla f_q\rangle\big)_{\substack{p=1,\ldots,\widehat{i},\ldots,n\\ q=1,\ldots,\widehat{j},\ldots,n}}\,. \end{aligned}$$

Пусть $L = (f'(x)) : T_x \to T_{f(x)}$ и пусть $L^* = (f'(x))^*$. Рассмотрим матрицу

$$L\,L^* = \begin{pmatrix} \langle\nabla f_1,\nabla f_1\rangle \ldots \langle\nabla f_1,\nabla f_n\rangle \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \langle\nabla f_n,\nabla f_1\rangle \ldots \langle\nabla f_n,\nabla f_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Δ_{ij} алгебраическое дополнение к элементу, стоящему на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы. Тогда

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det\,(\langle\nabla f_p, \nabla f_q\rangle)_{\substack{p=1,\dots,\widehat{i},\dots,n\\ q=1,\dots,\widehat{j},\dots,n}}$$

и

$$|\theta^*|^2 = |f|^{-2n}\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j} f_i\, f_j\,\Delta_{ij}\,.$$

Пусть $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n$ – собственные значения матрицы $L\,L^*$. Имеем

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla f_i, \nabla f_j\rangle\, f_i\, f_j \le \lambda_n\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \tag{3.2.13}$$

и, поскольку

$$(\Delta_{ij}) = J^2(x,f)(L\,L^*)^{-1}\,,$$

находим

$$|\theta^*|^2 \le \lambda_1^{-1} J^2(x,f)(\sum_{i=1}^{n} f_i^2)^{1-n}\,. \tag{3.2.14}$$

Заметим также, что

$$J(x,f) = \big(\det L\,L^*\big)^{1/2} = (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{1/2}$$

и, следовательно, условие квазиконформности (1.1.17) переписывается в виде

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdots\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^{1/2} \le K\,. \tag{3.2.15}$$

В силу (3.2.12) и (3.2.13), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{|dh|^n}\langle dh,\,*\theta^*\rangle \ &\ge \frac{1}{\lambda_n^{n/2}}J(x,f) = \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\cdots\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

и, тем самым,

$$\langle dh,\,*\theta^*\rangle \ \ge \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{n-1}{2}}|dh|^n\,.$$

Учитывая (3.2.15), убеждаемся в справедливости первого из условий (3.2.10) с постоянной $\nu'_1 = K^{1-n}$.

С другой стороны, соотношение (3.2.14) влечет

$$|\theta^*| \leq \sqrt{\lambda_2 \dots \lambda_n}\, |f|^{1-n} \,.$$

Пользуясь (3.2.11) и (3.2.13), выводим

$$|dh|^{n-1} \geq \lambda_1^{(n-1)/2} |f|^{1-n} \,.$$

Тем самым,

$$|\theta^*| \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \dots \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{1/2} \, |dh|^{n-1}$$

и, в силу (3.2.15), второе из требований (3.2.10) выполнено с постоянной $\nu'_2 = K^{n-1}$.

Таким образом, мы установили, что 1-форма dh принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$. Согласно теореме 2.2.4, форма dh является A-гармонической и, в частности, функция $h = \ln |f(x) - f(a)|$ есть решение некоторого уравнения вида (3.2.4) со структурными ограничениями (3.2.1), (3.2.2) и теми же структурными постоянными $\nu_1 = \nu'_1 = K^{1-n}$, $\nu_2 = \nu'_2 = K^{n-1}$.

Так как $(n-1)$-форма θ^* обладает свойством

$$\theta(\lambda\, dy) = \lambda |\lambda|^{n-2} \theta(dy) \,,$$

то это уравнение будет удовлетворять условию (3.2.3). □

3.2.2 Лемма Лебега – Куранта

Будем предполагать, что $\mathcal{X}$ – $n-$мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Фиксируем произвольно сферу $S_{\mathcal{X}}(a,t)$ так, чтобы $0 < t \leq R_{a,}$. Пусть Σ – открытое подмножество $S_{\mathcal{X}}(a,t)$, для которого $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) < \infty$. Для всякой пары точек $p, q \in \Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a,t)$ пусть $\Gamma = \Gamma(p,q)$ обозначает семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma$ соединяющих p и q. Определим конформный модуль семейства Γ, полагая

$$\operatorname{mod}\Gamma = \inf \frac{\int\limits_{\Sigma} \rho^n \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^1\right)^n}, \tag{3.2.16}$$

где инфимум берется по всем неотрицательным измеримым по Борелю функциям ρ на Σ. Если $\Gamma(p,q) = \emptyset$, то, по определению, $\operatorname{mod}\Gamma = \infty$.

Далее, следуя [198], вводим величину

$$\mu_a(t) = \inf_{p,q\in S_{\mathcal{X}}(a,t)} \operatorname{mod}\Gamma .$$

В случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ имеем $\mu_a(t) \geq c_2/t$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(n)$ (см. [243, лемма 5.29]) и, тем самым,

$$\int\limits_t^s \mu_a(\tau)\, d\tau \geq c_2 \ln\frac{s}{t}, \quad 0 < t < s . \tag{3.2.17}$$

Зафиксируем $0 < t' < t'' < R_a$ и рассмотрим кольцевую область

$$\mathcal{X}_a(t', t'') = \{x \in \mathcal{X} : t' < d(a,x) < t''\} .$$

Нам потребуется некоторая версия обобщенной леммы Лебега – Куранта [144, §4, глава I], в двумерном случае см. [84, теорема 1.9.1]. Для произвольной функции $f : S_{\mathcal{X}}(a,t) \to \mathbb{R}$ полагаем

$$\omega(f,t) = \sup \operatorname{osc}\{f, \Sigma\} ,$$

где точная верхняя грань берется по всем компонентам связности Σ множества $S_{\mathcal{X}}(a,t)$.

Лемма 3.2.1 *Если функция* $h \in W^{1,n}(B_{\mathcal{X}}(a,t''))$, *то при* $0 < t' < t''$ *выполнено*

$$\int\limits_{t'}^{t''} \omega^n(h, S_{\mathcal{X}}(a,t))\mu_a(t)\, dt \leq \int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} . \tag{3.2.18}$$

Доказательство. Мы будем следовать [198, лемма **5.1**]. В соответствии с формулой Кронрода – Федерера для ко-площади (см., например, [86, раздел **2.3.2**] или [20, раздел **2.4** главы 3]) мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,t)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla d(a,x)|}.$$

Поскольку $\mathcal{X}$ принадлежит классу C^3, то функция расстояния d непрерывно дифференцируема в $\mathcal{X}_a(t',t'')$ (при достаточно малых t'') и всюду на $\mathcal{X}_a(t',t'')$ мы имеем $|\nabla d| = 1$ (см., например, [45, лемма 2]). Таким образом, предыдущее соотношение переписывается в виде

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,t)} |\nabla h|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{3.2.19}$$

Фиксируем $t \in (t',t'')$ так, чтобы геодезическая сфера $S_{\mathcal{X}}(a,t)$ имела конечную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа. Пусть Σ – компонента связности $S_{\mathcal{X}}(a,t)$. Полагая в (3.2.16) функцию $\rho = |\nabla h(x)|$, получаем

$$\operatorname{mod}\Gamma \le \frac{\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^n d\mathcal{H}^{n-1}}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_{\gamma} |\nabla h| d\mathcal{H}^1\right)^n}.$$

Пусть $\gamma \in \Gamma = \Gamma(a,b)$ – дуга, вдоль которой функция h абсолютно непрерывна. Тогда имеем

$$|h(b) - h(a)| \le \int\limits_{\gamma} |\nabla h| d\mathcal{H}^1,$$

и, таким образом,

$$|h(b) - h(a)|^n \operatorname{mod}\Gamma \le \int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^n d\mathcal{H}^{n-1} \le \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,t)} |\nabla h|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Поскольку Σ произвольна, то

$$\omega^n(h, S_{\mathcal{X}}(a,t))\,\mu_a(t) \le \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,t)} |\nabla h|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Подставляя найденное соотношение в (3.2.19), приходим к (3.2.18). $\square$

Пусть $d = d(a,x)$ – геодезическое расстояние на $\mathcal{X}$. Следуя [198], будем говорить, что непрерывная функция $f : B_h(R) \to \mathbb{R}$ является *$d-$монотонной,* если для любого $0 < t < R_a$ выполнено

$$\operatorname{osc}\{f, B_h(t)\} = \omega(f,t).$$

Напомним, что непрерывная функция $u : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \mathcal{X}$ – открытое множество, является монотонной (в смысле Лебега), если для всякой подобласти $G \subset\subset D$, выполняется $\operatorname{osc}\{f, G\} = \operatorname{osc}\{f, \partial G\}$.

Упражнение. *Указать функцию, являющуюся $d-$монотонной, но не монотонной в смысле Лебега.*

В общем случае $d-$монотонные решения уравнения (3.2.4) не имеют компактных множеств уровня. Положим

$$m_f(\tau) = \inf\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,\tau)\}, \quad M_f(\tau) = \sup\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,\tau)\}.$$

Лемма 3.2.2 *Пусть f – произвольная непрерывная в некотором геодезическом шаре $B_{\mathcal{X}}(a,t)$ функция. Предположим, что при каждом $\tau \in [0,t]$ число компонент связности геодезической сферы $S_{\mathcal{X}}(a,\tau)$ конечно. Если f является $d-$монотонной в $B_{\mathcal{X}}(a,t)$, то для произвольной постоянной*

$$c \in [m_f(\tau), M_f(\tau)], \quad 0 \le \tau \le t,$$

выполняется

$$\{x \in \overline{B_h(\tau)} : f(x) = c\} \cap S_{\mathcal{X}}(a\tau) \ne \emptyset. \tag{3.2.20}$$

Доказательство. Зафиксируем $\tau \in [0,t]$. Пусть

$$\Sigma_1(\tau), \Sigma_2(\tau), \ldots, \Sigma_k(\tau), \quad k < \infty,$$

суть компоненты связности геодезической сферы $S_{\mathcal{X}}(a,\tau)$.

Мы имеем

$$M_f(\tau) - m_f(\tau) = \operatorname{osc}\{f, B_h(\tau)\} = \omega(f,\tau) =$$
$$= \max_{1\le i\le k} \operatorname{osc}\{f, \Sigma_i(\tau)\} = \max_{1\le i\le k}(M_i - m_i),$$

где

$$M_i = \inf\{f(x) : x \in \Sigma_i(\tau)\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in \Sigma_i(\tau)\}, \quad 1 \le i \le k.$$

Таким образом, существует номер i_0, $1 \le i_0 \le k$, для которого

$$M_f(\tau) - m_f(\tau) = M_{i_0} - m_{i_0}. \tag{3.2.21}$$

Однако, $M_{i_0} \le M_f(\tau)$ и $m_{i_0} \ge m_f(\tau)$. В силу (3.2.21) имеем

$$0 \le m_{i_0} - m_f(\tau) = M_{i_0} - M_f(\tau) \le 0$$

и, далее,

$$m_f(\tau) = m_{i_0}, \quad M_f(\tau) = M_{i_0}.$$

Данные соотношения влекут (3.2.20). $\square$

В качестве следствия полученных выше результатов приведем одну теорему лиувиллевого типа для d-монотонных функций с конечным интегралом Дирихле.

Теорема 3.2.2 *Пусть $h : B_{\mathcal{X}}(a,R) \to \mathbb{R}$ – d-монотонная функция, $0 < R \le R_a$. Тогда для любого $0 < t < R$ выполнено*

$$\operatorname{osc}^n (h, S_{\mathcal{X}}(a,t)) \int\limits_t^R \mu_a(t)\, dt \le \int\limits_{\mathcal{X}_a(t,R)} |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,. \tag{3.2.22}$$

В частности, если

$$\int\limits^{R_a} \mu_a(t)\, dt = \infty\,, \tag{3.2.23}$$

функция h является d-монотонной и

$$\int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,R_a)} |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} < \infty\,,$$

то $h \equiv \mathrm{const}$ на $B_{\mathcal{X}}(a,R_a)$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3.2.1 и определения d-монотонной функции. $\square$

3.2.3 Неравенство Гарнака

Классическое неравенство Гарнака хорошо известно в формулировке: *Если положительная гармоническая функция f определена в шаре*

$$B(a,2R)=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x-a|<2R\},\quad a\in\mathbb{R}^n,$$

то

$$\sup\{f(x): x\in B(a,R)\}\le\theta\,\inf\{f(x): x\in B(a,R)\}\,. \tag{3.2.24}$$

Здесь $\theta\ge 1$ – некоторая постоянная, независящая от $f, R,$ a (см., например, Е.М. Ландис [61]).

Серрин [234] доказал аналог неравенства Гарнака (3.2.24) для решений квазилинейных эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$, где постоянная θ зависит только от размерности n и структурных постоянных уравнения. К сожалению итеративный метод Серрина не может быть непосредственно распространен на случай решений в римановых многообразиях. Класс уравнений, изученных Серрином, включает, в частности, и уравнения вида (3.2.4) со структурными ограничениями (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3). Ниже, следуя [198], мы даем элементарное доказательство неравенства (3.2.24) для положительных решений уравнения (3.2.4).

Неравенство Гарнака имеет важные приложения в теории отображений с ограниченным искажением в $\mathbb{R}^n$ (см. [99], [158], [202], [242], [193]).

Для решений широкого класса эллиптических и параболических уравнений, положительных на геодезических шарах $B(a,2R)\subset\mathcal{X}$ риманова многообразия $\mathcal{X}$, неравенство Гарнака (3.2.24) было доказано в [138], [250] и др. Однако эти классы уравнений не содержат уравнения (3.2.4).

Для $p-$гармонических функций близкие результаты были получены Холопайненом [172], [173].

Пусть $\operatorname{cap}_n\mathcal{X}_a\,(t',t'')$ означает (конформную) емкость конденсатора $\mathcal{X}_a\,(t',t'')$, определяемую из вариационной задачи

$$\operatorname{cap}_n\mathcal{X}_a\,(t',t'')=\inf_u\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')}|\nabla u|^n*\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,,$$

где точная нижняя грань берется среди всех непрерывных функций $u:\overline{\mathcal{X}}(t',t'')\to\mathbb{R}$ класса $W^{1,n}(\mathcal{X}_a(t',t''))$ таких, что $u=0$ на $S_{\mathcal{X}}(a,t')$ и $u=1$ на $S_{\mathcal{X}}(a,t'')$.

Нам будет необходимо также следующее утверждение.

Лемма 3.2.3 *Пусть* $0 < R' < R'' < R_a$ *и пусть* $h \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}_a(R', R''))$ *– положительное обобщенное решение уравнения* (3.2.1) – (3.2.4). *Тогда для всяких* t', t'', $0 < R' < t' < t'' < R''$, *выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla \ln h|^n \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \left(\frac{\nu n}{n-1}\right)^n (\mathrm{cap}_n\, \mathcal{X}_a(R', t') + \mathrm{cap}_n\, \mathcal{X}_a(t'', R''))\,. \tag{3.2.25}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u = \ln h$. Тогда

$$u \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}_a(R', R''))\,.$$

Выберем произвольно липшицеву функцию φ с носителем, содержащимся в $\mathcal{X}_a(R', R'')$. Согласно определению обобщенного решения (3.2.5) и на основании соотношения (3.2.3), имеем

$$0 = \int\limits_{\mathcal{X}} \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla e^u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{\mathcal{X}} \langle e^{(n-1)u} \nabla\varphi, A(x, \nabla u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{X}} \langle \nabla(e^{(n-1)u}\varphi), \nabla A(x, \nabla u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} -$$

$$-(n-1) \int\limits_{\mathcal{X}} \varphi e^{(n-1)u} \langle \nabla u, A(x, \nabla u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \langle \nabla\eta, A(x, \nabla u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = (n-1) \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \eta \, \langle \nabla u, A(x, \nabla u)\rangle \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,,$$

где $\eta = \varphi e^{(n-1)u}$.

В частности, для произвольной непрерывной неотрицательной функции $\psi \in W^{1,n}(\mathcal{X}_a(R', R''))$ с носителем, содержащимся в $\mathcal{X}_a(R', R'')$, выполнено

$$\frac{n-1}{n} \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^n \langle \nabla u, A(x, \nabla u)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^{n-1} \langle \nabla\psi, A(x, \nabla u)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Пользуясь структурными ограничениями (3.4.3)–(3.4.8) получаем

$$\frac{n-1}{n}\nu_1 \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^n |\nabla u|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \nu_2 \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^{n-1}|\nabla\psi||\nabla u|^{n-1} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \nu_2 \left(\int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^n |\nabla u|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{1/n} \left(\int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} |\nabla\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Данное неравенство влечет

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} \psi^n |\nabla u|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{n\nu}{n-1}\right)^n \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',R'')} |\nabla\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Выберем функцию ψ так, чтобы $\psi \equiv 1$ на $\mathcal{X}_a(t',t'')$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla u|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{n\nu}{n-1}\right)^n \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',t')\cup\mathcal{X}_a(t'',R'')} |\nabla\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Минимизируя правую часть по всем функциям ψ, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla u|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{n\nu}{n-1}\right)^n \left(\inf_{\psi} \int\limits_{\mathcal{X}_a(R',t')} |\nabla\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} + \inf_{\psi} \int\limits_{\mathcal{X}_a(t'',R'')} |\nabla\psi|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right).$$

Пользуясь определением емкости конденсатора, приходим к (3.2.25). □

Следующая характеристика играет важную роль в наших оценках постоянной в неравенстве Гарнака. Проблема нахождения наилучшей постоянной в неравенстве ведет к трудной задаче со свободной границей на n-мерных кольцевых областях $\mathcal{X}(t',t'')$. Ограничимся рассмотрением только одномерной задачи на минимум. Для произвольных

$$0 < t' < t'' < R_a$$

полагаем

$$\theta(t',t'') = \inf_{\tau\in(t',t'')} \left(\operatorname{cap}_n \mathcal{X}(\tau,t'') / \int\limits_{t'}^{\tau} \mu_a(t)dt \right).$$

Теорема 3.2.3 *Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное некомпактное риманово многообразие без границы и пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – d-монотонное обобщенное решение (3.2.1) – (3.2.4) в геодезическом шаре $B_{\mathcal{X}}(a,R)$, $0 < R \leq R_a$. Тогда, если $f(x) > 0$ для всех $x \in B_{\mathcal{X}}(a,R)$, то при любом $r \in (0,R)$ выполнено*

$$\sup\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,r)\} \leq \theta \inf\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,r)\}, \tag{3.2.26}$$

где можно положить

$$\theta = \exp\{\frac{\nu n}{n-1}\theta^{\frac{1}{n}}(r,R)\}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (3.2.18) и (3.2.25). Если $0 < r < \tau < R < R_a$, то

$$\int_r^\tau \omega^n(\ln f,t)\mu_p(t)dt \leq \int_{\mathcal{X}(r,\tau)} |\nabla \ln f|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{n\nu}{n-1}\right)^n \operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(\tau,R).$$

Таким образом, мы можем найти постоянную $s \in (r,\tau)$, для которой

$$\omega(\ln f,s) \leq \frac{n\nu}{n-1} \operatorname{cap}_n^{1/n} \mathcal{X}_a(\tau,R) / \left(\int_r^\tau \mu_a(t)dt\right)^{1/n}.$$

Пусть Σ – компонента связности геодезической сферы $S_{\mathcal{X}}(a,s)$. Данное неравенство влечет, что

$$\sup\{\ln f(x) : x\in\Sigma\} - \inf\{\ln f(x) : x\in\Sigma\} \leq \frac{n\nu}{n-1}\theta^{1/n}(r,R)$$

и мы получаем

$$\sup\{f(x) : x\in\Sigma\} \leq \theta \inf\{f(x) : x\in\Sigma\} \tag{3.2.27}$$

где θ как в теореме.

Так как f является $d-$монотонной, то

$$\sup\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,R)\} \leq \sup\{f(x) : x \in \Sigma_{\mathcal{X}}(a,s)\} \leq$$

$$\leq \theta \inf\{f(x) : x \in \Sigma_{\mathcal{X}}(a,s)\} \leq \theta \inf\{f(x) : x \in B_{\mathcal{X}}(a,R)\}\,,$$

и теорема доказана. □

3.2.4 D-свойство

Пусть M, N – римановы многообразия соответственно размерностей n и $n-1$. Пусть $g : M \to N$ – локально липшицево отображение. По теореме Радемахера – Степанова g дифференцируемо почти всюду. В точках дифференцируемости отображения g определено касательное отображение $dg : T_xM \to T_{g(x)}N$. Пусть $T^{\perp}$ – ортогональное дополнение в T_xM к подпространству $\operatorname{Ker} dg$. Если $\dim T^{\perp} = n-1$, т.е. $\operatorname{rang} dg = n-1$, то якобианом $J_{n-1}(g,x)$ отображения g в точке x называется якобиан отображения $dg|_{T^{\perp}}$. Если $\dim T^{\perp} < n-1$, т.е. $\operatorname{rang} dg < n-1$, то по определению полагается $J_{n-1}(g,x) = 0$ [20, раздел **2.4** главы 3].

Для всякой кольцевой области $\mathcal{X}_a(t',t'')$ можно определить величину, двойственную емкости. Рассмотрим произвольное локально липшицево отображение $g : \mathcal{X}_a(t',t'') \to S^{n-1}$, $S^{n-1} = S^{n-1}(0,1)$, такое, что для всякого измеримого $A \subset\subset \mathcal{X}_a(t',t'')$ выполняется

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} J_{n-1}(g,x) > 0\,. \tag{3.2.28}$$

Предположим, что каждая линия уровня

$$l(\theta) = \{x \in \mathcal{X}_a(t',t'') : g(x) = \theta,\, \theta \in S^{n-1}\}$$

отображения g связна и соединяет в кольцевой области $\mathcal{X}_a(t',t'')$ геодезические сферы $S_{\mathcal{X}}(a,t')$, $S_{\mathcal{X}}(a,t'')$. Положим

$$\operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t',t'') = \sup \int\limits_{S^{n-1}} \frac{d\theta}{\left(\int\limits_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)}\, d\mathcal{H}^1\right)^{n-1}}\,, \tag{3.2.29}$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным отображениям g описанного вида. В случае, когда множество допустимых отображений g пусто, мы полагаем $\operatorname{dual}\mathcal{X}_a(t',t'')=+\infty$.

Если $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{X}_a(t',t'')=\{x : t'<|x-a|<t''\}$, то $g=x/|x|$ и $J_{n-1}(g,x)=|x|^{1-n}$. Тогда, как легко видеть, g обладает свойством (3.2.28) и

$$\operatorname{dual}\mathcal{X}_a(t',t'')\geq\frac{\omega_{n-1}}{\ln^{n-1}t''/t'}\,.$$

Мы используем введенную величину в оценках следующего вида.

Лемма 3.2.4 *Пусть* $h\in W^{1,n}(\mathcal{X}_a(t',t''))$. *Тогда*

$$\inf_{\theta\in S^{n-1}}\operatorname{osc}^n\{h,l(\theta)\}\leq\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')}|\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\Big/\operatorname{dual}\mathcal{X}_a(t',t'')\,. \qquad (3.2.30)$$

Доказательство. Фиксируем локально липшицево отображение

$$g:\mathcal{X}_a(t',t'')\to S^{n-1}\,,$$

допустимое в вариационной проблеме (3.2.29). По формуле Кронрода – Федерера для отображения $g: M\to N$ и произвольной измеримой функции $\varphi: M\to\mathbb{R}$ выполнено

$$\int\limits_M\varphi\,J_{n-1}(g,x)\,*\mathbb{1}_M=\int\limits_N\left[\int\limits_{g^{-1}(y)}\varphi(x)\,d\mathcal{H}^1\right]d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,.$$

В частности, мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')}|\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}=\int\limits_{S^{n-1}}d\theta\int\limits_{l(\theta)}|\nabla h|^n\frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}}\,.$$

Для почти всех $\theta\in S^{n-1}$ функция u абсолютно непрерывна вдоль $l(\theta)$.

Поэтому

$$\operatorname{osc}^n\{h, l(\theta)\} \le \left(\int\limits_{l(\theta)} |\nabla h|\, d\mathcal{H}^1\right)^n \le$$

$$\le \int\limits_{l(\theta)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}} \left(\int\limits_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)} d\mathcal{H}^1\right)^{n-1}.$$

Интегрированием данного неравенства находим

$$\int\limits_{S^{n-1}} \operatorname{osc}^n\{h, l(\theta)\}\, d\theta \Bigg/ \left(\int\limits_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)} d\mathcal{H}^1\right)^{n-1} \le$$

$$\le \int\limits_{S^{n-1}} d\theta \int\limits_{l(\theta)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}}.$$

Неравенство (3.2.30) вытекает отсюда с очевидностью. □

Для произвольного гомеоморфизма $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ мы обозначаем

$$L(a, r) = \max_{x \in S_{\mathcal{X}}(a,r)} |f(x) - f(a)| \quad \text{и} \quad l(a, r) = \min_{x \in S_{\mathcal{X}}(a,r)} |f(x) - f(a)|.$$

Пусть $a \in \mathcal{X}$ и $\rho \in (0, R_a)$ – произвольны. Фиксируем R' так, чтобы $0 < R' < \rho < R_a$, и $t' \in (R', \rho)$, $t'' \in (\rho, R_a)$. Введем величину

$$I_a(\xi, \eta) = \operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(\xi, \eta), \quad 0 < \xi < \eta < R_a.$$

Далее полагаем

$$\begin{aligned}\Phi_a(R',t',t'') &= (I_a(R',\rho)+I_a(\rho,R_a))^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{t'}^{\rho} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n} + \\ &+ (I_a(R',\rho)+I_a(t'',R_a))^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{\rho}^{t''} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n} + \\ &+ (I_a(R',t')+I_a(t'',R_a))^{1/n} \Big/ \mathrm{dual}^{1/n}\, \mathcal{X}_a(t',t'')\end{aligned}$$

и, наконец, введем обозначение

$$D(a,\rho,K) = \exp\left\{\frac{nK^{2n-2}}{n-1}\,\inf \Phi_a(R',t',t'')\right\}\,,$$

где $K \ge 1$ – постоянная и точная нижняя грань берется по всем R', t', t'' таким, что

$$0 < R' < t' < \rho < t'' < R_a\,.$$

Сформулируем важное утверждение, которое, следуя П.П. Белинскому [9, §3, глава I], будем называть D-свойством квазиконформных отображений.

Теорема 3.2.4 *Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное $n-$мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Пусть*

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n \quad - \quad K\text{-квазиконформное отображение.}$$

Тогда для всякой точки $a \in \mathcal{X}$ и всякого ρ, $0 < \rho < R_a$, выполнено

$$\frac{L(a,\rho)}{l(a,\rho)} \le D(a,\rho,K)\,. \tag{3.2.31}$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{X}$ и $\rho \in (0, R_a)$ – произвольны. Фиксируем R', R'' так, чтобы $0 < R' < \rho < R'' < R_a$, и $t' \in (R',\rho)$, $t'' \in (\rho, R'')$. Займемся оценкой величины $L(a,\rho)/l(a,\rho)$.

Прежде всего заметим, что данная величина инвариантна относительно растяжений с полюсом в точке a и потому посредством такого преобразования можно добиться того, чтобы $l(a, R') > 1$. Тем самым, не умаляя общности, можем считать, что всюду в кольцевой области $\mathcal{X}_a(R', R'')$ функция $h = \ln|f(x) - f(a)| > 0$.

Далее, согласно лемме 3.2.1 функция h является обобщенным решением некоторого уравнения вида (3.2.5). Пользуясь леммой 3.2.3, находим

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',\rho)} |\nabla \ln h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{\nu n}{n-1}\right)^n (\operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(R', t') + \operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(\rho, R'')) \equiv I_1\,,$$

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(\rho,t'')} |\nabla \ln h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{\nu n}{n-1}\right)^n (\operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(R', \rho) + \operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(t'', R'')) \equiv I_2$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{X}_a(t',t'')} |\nabla \ln h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{\nu n}{n-1}\right)^n (\operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(R', t') + \operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(t'', R'')) \equiv I_3\,.$$

Отсюда на основании леммы 3.2.1 получаем

$$\int\limits_{t'}^{\rho} \operatorname{osc}^n(\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,t))\, \mu_a(t)\, dt \leq I_1$$

и

$$\int\limits_{\rho}^{t''} \operatorname{osc}^n(\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,t))\, \mu_a(t)\, dt \leq I_2\,.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существуют $u \in (t', \rho)$, $v \in (\rho, t'')$ такие, что

$$\operatorname{osc}^n\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,u)\} \leq (I_1 + \varepsilon) \Bigg/ \int\limits_{t'}^{\rho} \mu_a(t)\, dt \tag{3.2.32}$$

и

$$\operatorname{osc}^n\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,v)\} \leq (I_2 + \varepsilon) \Bigg/ \int\limits_{\rho}^{t''} \mu_a(t)\, dt\ . \tag{3.2.33}$$

Воспользуемся теперь леммой 3.2.4. Существует $\theta_0 \in S^{n-1}$, для которого

$$\operatorname{osc}^n \{\ln h, l(\theta_0)\} \le (I_3 + \varepsilon) \,/\operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t'') \,. \tag{3.2.34}$$

Объединяя оценки (3.2.32) — (3.2.34) и учитывая монотонность решений уравнения (3.2.5), приходим к неравенству

$$\operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,\rho)\} \le \operatorname{osc}\{\ln h, \mathcal{X}_a(t', t'')\} \le$$

$$\le \operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,t')\} + \operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a,t'')\} + \operatorname{osc}\{\ln h, l(\theta_0)\} \le$$

$$\le (I_1+\varepsilon)^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{t'}^{\rho} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n} + (I_2+\varepsilon)^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{\rho}^{t''} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n}$$

$$+ (I_3+\varepsilon)^{1/n} \Big/ \operatorname{dual}^{1/n} \mathcal{X}_a(t', t'') \,.$$

В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$, находим

$$\ln \frac{L(a,\rho)}{l(a,\rho)} \le I_1^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{t'}^{\rho} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n} +$$

$$+ I_2^{1/n} \Bigg/ \left(\int\limits_{\rho}^{t''} \mu_a(t)\,dt\right)^{1/n} + I_3^{1/n} \Big/ \operatorname{dual}^{1/n} \mathcal{X}_a(t', t'') \,.$$

Перейдем к пределу при $R'' \to R_a$. Тогда получаем

$$\ln \frac{L(a,\rho)}{l(a,\rho)} \le \frac{nK^{2n-2}}{n-1}\,\Phi_a(R', t', t'') \,,$$

откуда оценка (3.2.31) следует с необходимостью. □

Оценим величину $D(a,\rho)$ для подобластей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $q = (R_a/\rho)^{1/2}$. Положим

$$R' = q^{-2}\rho, \; t' = q^{-1}\rho, \; t'' = q\rho \,.$$

n-Емкость сферического кондесатора $\mathcal{X}_a(\xi,\eta)$ легко вычисляется

$$\operatorname{cap}_n \mathcal{X}_a(\xi,\eta) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\ln\frac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}}\,.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_a(R',t',t'') \ &\le \left(\frac{\omega_{n-1}}{(2\ln q)^{n-1}}+\frac{\omega_{n-1}}{(2\ln q)^{n-1}}\right)^{1/n}\Bigg/ (c_2\ln q)^{1/n} + \\
&+\left(\frac{\omega_{n-1}}{(2\ln q)^{n-1}}+\frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}}\right)^{1/n}\Bigg/ (c_2\ln q)^{1/n} + \\
&+\left(\frac{(\ln q)^{n-1}}{\omega_{n-1}}\right)^{1/n}\left(\frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}}+\frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}}\right)^{1/n} = \\
&= \frac{\omega_{n-1}^{1/n}}{c_2^{1/n}2^{(n-2)/n}\ln q}+\frac{\omega_{n-1}^{1/n}(1+2^{n-1})^{1/n}}{c_2^{1/n}2^{(n-1)/n}\ln q}+2^{1/n} = \\
&= 2^{1/n}+\frac{c_3(n)}{\ln q}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, для подобластей в $\mathbb{R}^n$ мы приходим к оценке

$$D(a,\rho,K)\le \exp\left\{\frac{nK^{2n-2}}{n-1}\left(2^{1/n}+\frac{2c_3(n)}{\ln R_a/\rho}\right)\right\}\,. \tag{3.2.35}$$

3.3 Характеристики многообразия

Опишем необходимые в дальнейшем свойства многообразия — изопериметрический профиль, основную частоту сечений многообразия геодезическими сферами и их N-средние.

3.3.1 Изопериметрический профиль

Изопериметрическим профилем многообразия $\mathcal{Y}$ называется функция

$$\theta = \theta_{\mathcal{Y}} : [0, v) \to \mathbb{R}_+, \quad v = \mathcal{H}^n(\mathcal{Y}),$$

определяемая выражением

$$\theta_{\mathcal{Y}}(\tau) = \inf \left\{ \mathcal{H}^{n-1}(\partial' G) : G \subset \mathcal{Y} - \text{подобласть с } \mathcal{H}^n(G) = \tau \right\}.$$

Здесь и ниже $\mathcal{H}^k(E)$ есть k-мерная мера Хаусдорфа множества $E \subset \mathcal{Y}$ и $\partial' G = \partial G \setminus \partial \mathcal{Y}$.

Другими словами, изопериметрический профиль $\theta_{\mathcal{Y}}$ есть наилучшая из функций θ, удовлетворяющих условию

$$\theta\left(\mathcal{H}^n(G)\right) \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial' G). \tag{3.3.1}$$

В специальном случае $\mathbb{R}^n$ понятие изопериметрического профиля было введено Альфорсом [118, с.188]; относительно приложений изопериметрических методов в квазиконформных отображениях см. [107, часть I, §13], [160], [221], [201].

Пусть далее ω_{n-1} означает $(n-1)$-мерную площадь единичной сферы $S^{n-1}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $L_0(n) = {\omega_{n-1}}^{1/n} n^{(n-1)/n}$ и пусть

$$\theta_0(t) = L_0(n)\, t^{(n-1)/n}.$$

Воспользуемся хорошо известным изопериметрическим свойством $\mathbb{R}^n$:

$$\theta_0\left(\mathcal{H}^n(G)\right) \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial G)$$

для всякой области $G \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂G, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial G) < \infty$.

Изопериметрический профиль полупространств $\mathbb{R}^n_\pm$ дается выражением

$$\theta_{\mathbb{R}^n_\pm}(t) = L_1(n)\, t^{(n-1)/n}, \quad L_1(n) = (\omega_{n-1}/2)^{1/n}\, n^{(n-1)/n}. \tag{3.3.2}$$

В общем случае изопериметрический профиль $\theta_{\mathcal{Y}}(\tau)$ труден для нахождения. Не менее трудными являются и его оценки через кривизны многообравзия или другие геометрические величины. Ниже мы укажем несколько таких случаев.

Если $\mathcal{Y}$ – полное, односвязное $n-$мерное риманово многообразие неположительной секционной кривизны, то, как показано в [176] и [143], существует постоянная $\overline{c}(n) \leq L_0(n)$ такая, что

$$\overline{c}(n) \left(\mathcal{H}^n\,(G)\right)^{(n-1)/n} \leq \mathcal{H}^{n-1}\,(\partial G)\,.$$

Тем самым,

$$\theta_{\mathcal{Y}}(\tau) \geq \overline{c}_n\,\tau^{(n-1)/n}. \tag{3.3.3}$$

Предположим, что $\mathcal{Y}$ – полное, односвязное риманово многообразие, $\dim \mathcal{Y} = n$. Если секционная кривизна $K_{\mathcal{Y}}$ многообразия $\mathcal{Y}$ удовлетворяет условию $K_{\mathcal{Y}} \leq k < 0$, $k = \text{const}$, то

$$(n-1)\sqrt{(-k)}\,\mathcal{H}^n\,(G) \leq \mathcal{H}^{n-1}\,(\partial G)$$

([248], стр. 504; [20], 34.2.6) и, таким образом,

$$\theta_{\mathcal{Y}}(\tau) \geq (n-1)\,\sqrt{(-k)}\,\tau\,. \tag{3.3.4}$$

Сделаем замечание об альтернативных изопериметрических характеристиках областей. Пусть $\mathcal{Y}$ – связное ориентируемое риманово многообразие. Определим *изодиаметрический профиль* риманова многообразия $\mathcal{Y}$ как функцию

$$\eta : [0, \text{diam}(\mathcal{Y})) \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]\,,$$

задаваемую выражением

$$\eta(r) = \,\sup\{\mathcal{H}^n(A) :\; A \subset\subset \mathcal{Y} \quad \text{и} \quad \text{diam}\,(A) \leq r\}\,. \tag{3.3.5}$$

Тем самым, η есть наилучшая из функций таких, что соотношение $\text{diam}\,A \leq r$ влечет $\text{vol}\,(A) \leq \eta(r)$. Например, в случае $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ имеем

$$\eta(r) = \frac{\omega_{n-1}}{n2^n} r^n\,,$$

где

$$\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}\,/\Gamma(n/2)$$

есть площадь единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ [148, стр. 69].

Относительно возможных приложений в теории отображений с ограниченным искажением см. [164].

3.3.2 Основная частота и ее N-средние

Для произвольного открытого множества $\Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a,r) \subset \mathcal{X}$ определим величину

$$\lambda_S(\Sigma) = \inf \frac{\left(\int\limits_{\Sigma} |\nabla_S \varphi|^n d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n}}{\left(\int\limits_{\Sigma} |\varphi|^n d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n}}, \tag{3.3.6}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям

$$\varphi \in W^{1,n}(\Sigma), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Sigma\,,$$

и $\nabla_S \varphi$ означает градиент φ в метрике $S_{\mathcal{X}}(a,r)$.

Величина $\lambda_S(\Sigma)$ называется *основной частотой* множества

$$\Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a,r)\,.$$

В случае, когда Σ – область в $\mathbb{R}^n$ и $n=2$, данная величина имеет конкретный физический смысл и означает частоту наиболее низкого собственного тона однородной упругой мембраны, жестко закрепленной на границе области Σ (см., например, [123, главу III]). Некоторые оценки основной частоты $\lambda_S(\Sigma)$ для общего случая имеются в [72], близкие вопросы рассматриваются в [3], [4] и др.

Кроме основной частоты, нами будет использоваться еще одна численная характеристика, которая определяется следующим образом. Пусть $U \subset S_{\mathcal{X}}(a,r)$ – произвольное открытое множество. Зададим целое $N > 1$ и обозначим через $\{U_i\}$ – семейство непустых открытых подмножеств $U_i \subset U$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ такое, что $U_i \cap U_j = \emptyset$ при любых $i \neq j$. Величину

$$\lambda_S(U,N) = \inf \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_S(U_i), \tag{3.3.7}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным семействам U_i, состоящим из N открытых подмножеств, будем называть *N – средним основной частоты* множества $U \subset S_{\mathcal{X}}(a,r)$. Если $N = 1$, то по определению полагаем

$$\lambda_S(U,1) = \inf_{U' \subset U, \partial U \neq \emptyset} \lambda_S(U').$$

Указанные величины являются специальными случаями характеристик $\varepsilon(\tau, \mathcal{F}_B)$ и $E(\tau, N)$, вводимых соотношениями (2.3.21), (2.3.35), но более прозрачны по содержанию и используются ниже, в том числе, для оценок $\varepsilon(\tau, \mathcal{F}_B)$ и $E(\tau, N)$.

Основное содержание данного раздела состоит в оценках $\lambda_S(U, 1)$.

Остановимся сперва на простейших свойствах этой величины. Прежде всего отметим, что для любой пары открытых множеств $V \subset U$ из $S_{\mathcal{X}}(a, r)$ выполнено

$$\lambda_S(V) \geq \lambda_S(U)\,, \tag{3.3.8}$$

откуда вытекает, что $\lambda_S(U, N) \geq \lambda_S(U)$ при $N \geq 1$.

Приведем более общее утверждение о монотонности N-средних основной частоты.

Лемма 3.3.1 *Для произвольного открытого множества $U \subset S_{\mathcal{X}}(a, r)$ и любого $N \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\lambda_S(U, N+1) \geq \lambda_S(U, N) \tag{3.3.9}$$

Для **доказательства** рассмотрим произвольное семейство $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, ..., N+1)$, допустимое при вычислении точной нижней грани в (3.3.7). Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\lambda_S(U_i) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N+1}\lambda_S(U_j)\right\}$$

Так как

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N+1}\lambda_S(U_j) \geq \lambda_S(U, N),$$

то

$$\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\lambda_S(U_i) \geq \lambda_S(U, N)\,,$$

что и доказывает (3.3.9). □

Естественно предположить, что для "достаточно хороших" многообразий N-средние основной частоты множества $U \subset S_{\mathcal{X}}(a, r)$ стремятся к бесконечности с ростом N. Ниже будет показано, что это справедливо, по крайней мере, в двух важных случаях, а именно, когда U – множество конечного объема в $\mathbb{R}^n$ и когда U – множество на гиперсфере в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Нам потребуется изопериметрическое неравенство, связывающее основную частоту множества U с основной частотой шара того же объема. Данное неравенство может быть получено известными симметризационными методами, как и в случае $\alpha = 2$ (см. [96]). Мы дадим более короткое доказательство, представляющее собой комбинацию рассуждений из работ [151] и [157], использованных там в иных целях.

Пусть $\mathcal{X}$ есть n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, оснащенное римановой метрикой $ds_{\mathcal{X}} = \rho(x)\,|dx|$, где ρ – непрерывная, положительная в $\mathbb{R}^n$ функция. Пусть $\theta(t)$ – непрерывная функция, определенная на $[0, c]$, где c – объем $\mathbb{R}^n$ в метрике $ds_{\mathcal{X}}$. Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ является θ – изопериметричным, т.е. для произвольного открытого множества U с границей ∂U, $\partial U \neq \emptyset$, имеющей конечную меру $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)$, справедливо неравенство

$$\theta\left(\int\limits_U \rho^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right) \leq \int\limits_{\partial U} \rho^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{3.3.10}$$

Имеет место

Теорема 3.3.1 *Пусть U – открытое подмножество θ-изопериметрического многообразия $\mathcal{X}$, $\partial U \neq \emptyset$. Тогда*

$$\lambda^n(U) \geq \inf \frac{\int\limits_0^{\mathcal{H}^n(U)} \theta^n(t)\,|g'(t)|^n\,dt}{\int\limits_0^{\mathcal{H}^n(U)} g^n(t)\,dt}\,, \tag{3.3.11}$$

где точная нижняя грань берется по всем убывающим, абсолютно непрерывным на $[0, \mathcal{H}^n(U)]$ функциям $g(t)$, $g\left(\mathcal{H}^n(U)\right) = 0$, и символ $\mathcal{H}^n(U)$ означает объем U в метрике $ds_{\mathcal{X}}$.

Доказательство. Воспользуемся известным приемом получения таких оценок для областей евклидова пространства (см. [151, замечание 6.6] или [65, глава 2]). Зафиксируем произвольно функцию g, допустимую в вариационной задаче (3.3.6). Не ограничивая общности, можно считать ее неотрицательной. Пользуясь формулой для коплощади, имеем

$$\|\varphi\|_U^n = \int\limits_U \varphi^n(x)\,\rho^n(x)\,dx = \int\limits_0^\infty t^n\,dt \int\limits_{E_t} \rho^n \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla\varphi|}, \tag{3.3.12}$$

где E_t – множество t-уровня функции φ.

Положим

$$V(t) = \int\limits_{\varphi(x)\geq t} \rho^n(x)\,dx.$$

Нетрудно видеть, что для почти всех t выполнено

$$V'(t) = -\int\limits_{E_t} \rho^n \frac{d\mathcal{H}^n}{|\nabla\varphi|},$$

и равенство (3.3.12) можно переписать в виде

$$\|\varphi\|_U^n = \int\limits_0^{\mathcal{H}^n(U)} t^n(V)\,dV. \tag{3.3.13}$$

Далее заметим, что

$$\||\nabla\varphi|\|_U^n = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_{E_t} |\nabla\varphi|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{3.3.14}$$

В силу неравенства Гельдера, имеем

$$\int\limits_{E_t} \rho^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1} \leq \left(\int\limits_{E_t} |\nabla\varphi|^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} \left(\int\limits_{E_t} \rho^n \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla\varphi|}\right)^{(n-1)/n},$$

И пользуясь (3.3.10), приходим к неравенству

$$\frac{\theta^n\left(V(t)\right)}{|V'(t)|^{n-1}} \leq \int\limits_{E_t} |\nabla\varphi|^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Отсюда, на основании (3.3.14), вытекает, что

$$|||\nabla_{\mathcal{X}}\varphi|||_U^n \geq \int\limits_0^{\mathcal{H}^n(U)} \theta^n(V)\,|t'(V)|\,dV \tag{3.3.15}$$

Сопоставляя (3.3.13) и (3.3.15) получаем требуемое. □

Рассмотрим теперь случай, в котором $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Введем величину

$$j(\alpha, n) = \inf \frac{\int\limits_0^1 t^{\alpha(n-1)/n}|g'(t))|^\alpha\,dt}{\int\limits_0^1 g^\alpha(t)\,dt}, \tag{3.3.16}$$

где точная нижняя грань берется по всем убывающим, абсолютно непрерывным на $[0,1]]$ функциям $g(t),\ g(1) = 0$. Известно, что (см. [114], [63] или [150, стр. 382])

$$j(\alpha, 1) = (\alpha - 1)\left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-\alpha}.$$

Полагая в (3.3.11) $\theta(t) = (\omega_{n-1}n^{n-1}t^{n-1})^{1/n}$, приходим к неравенству

$$\lambda(U) \geq c_1 \mathcal{H}^n(U)^{-1/n}, \tag{3.3.17}$$

где

$$c_1 = (n^{n-1}\omega_{n-1})^{1/n} j^{1/n}(n, n)$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда U – шар.

Неравенство (3.3.17), кроме непосредственной оценки основной частоты, может служить источником также грубой, однако достаточно эффективной оценки ее N-средних.

Лемма 3.3.2 *Для произвольного открытого множества* $U \subset \mathbb{R}^n$ *выполнено*

$$\lambda(U, N) \geq c_1 \left(\frac{N}{\mathcal{H}^n(U)}\right)^{1/n}, \tag{3.3.18}$$

где c_1 *– постоянная из неравенства* (3.3.17). *При* $n = 1$ *имеет место знак равенства.*

Чтобы **доказать** данное утверждение, зафиксируем семейство открытых, попарно непересекающихся подмножеств $U_i \subset U$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. В силу (3.3.17), для каждого из U_i имеем

$$\lambda(U_i)^{-n} \le c_1^{-n} \mathcal{H}^n(U_i)\,,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(U_i)^{-n} \le c_1^{-n} \mathcal{H}^n(U). \tag{3.3.19}$$

Пользуясь неравенством

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |a_i|^{t_1}\right)^{1/t_1} \le \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |a_i|^{t_2}\right)^{1/t_2}, \tag{3.3.20}$$

справедливым при любых $t_1 \le t_2$ (см., [114, стр. 41]), получаем

$$N^{-1/n} \left(\sum_{i=1}^{N} (\lambda(U_i))^{-n}\right)^{-1/n} \le \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda(U_i).$$

Отсюда, на основании (3.3.19), можно заключить, что

$$c_1 \left(\frac{N}{\mathcal{H}^n(U)}\right)^{1/n} \le \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda(U_i),$$

и неравенство (3.3.18) доказано.

Утверждение о знаке равенства следует из высказываний о равенствах в (3.3.17) и (3.3.20). □

Нам потребуется также следующее утверждение.

Лемма 3.3.3 *Пусть $l = kx + b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – преобразование подобия и $k > 0$. Тогда для всякой области $D \subset \mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\lambda(l(D)) = \frac{1}{k} \lambda(D)\,, \tag{3.3.21}$$

$$\lambda(D, N) = k\, \lambda(l(D), N)\,, \quad N = 2, 3, \dots\,. \tag{3.3.22}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(y) \in C_0^1(l(D))$ – произвольная функция и $\varphi^*(x) = \varphi(kx+b) \in C_0^1(D)$. Легко видеть, что

$$\int\limits_{l(D)} |\varphi(y)|^n dy_1 \dots dy_n = k^n \int\limits_D |\varphi^*(x)|^n dx_1 \dots dx_n$$

и

$$\int\limits_{l(D)} |\nabla\varphi(y)|^n dy_1 \dots dy_n = k^{n-p} \int\limits_D |\nabla\varphi^*(x)|^n dx_1 \dots dx_n.$$

Мы имеем

$$\frac{\left(\int\limits_{l(D)} |\nabla\varphi(y)|^n dy_1 \dots dy_n\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_{l(D)} |\varphi(y)|^n dy_1 \dots dy_n\right)^{1/n}} = k^{-1} \frac{\left(\int\limits_D |\nabla\varphi^*(x)|^n dx_1 \dots dx_n\right)^{1/n}}{\left(\int\limits_D |\varphi^*(x)|^n dx_1 \dots dx_n\right)^{1/n}},$$

откуда легко приходим к (3.3.21) и (3.3.22). □

3.3.3 Неравенство В.А. Клячина

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное, связное, ориентируемое риманово C^2-многообразие. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in \mathcal{M}$ и обозначим через $r(x, x_0)$ геодезическое расстояние от точки x до x_0. Положим

$$B(r) = \{x : \ r(x_0, x) < r\}, \quad S(r) = \{x : \ r(x_0, x) = r\}.$$

Если D – область в $\mathcal{M}$, то мы пользуемся обозначениями

$$D(r) = D \cap B(r), \quad \Sigma(r) = D \cap S(r).$$

Пусть ω – дифференциальная $(n-1)$-форма, определенная в D и такая, что

$$\omega \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}, \ \omega|_{\partial D} = 0, \ *d\omega \geq 0.$$

Рассмотрим величину

$$\varepsilon(r) = \sup_{\omega_0} \int\limits_{\Sigma(r)} *d\omega \Bigg/ \left| \int\limits_{\Sigma(r)} \omega - \omega_0 \right| ,$$

где sup берется по всем замкнутым формам $\omega_0 \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, $\omega_0|_{\partial D} = 0$.

Данная величина будет оцениваться ниже через основную частоту множества $\Sigma(r)$, что нам потребуется, в свою очередь, для оценок искажения отображений с ограниченным искажением. Но сначала мы укажем некоторые ее оценки, получаемые непосредственно.[2] Далее, вплоть до конца раздела мы следуем работе В.А. Клячина [191], выполненной по нашей просьбе.

Будем рассматривать формы ω следующего типа. Предположим, что функция $f \in W^{1,q}(D)$ и $df = 0$ на границе ∂D. Пусть W – $(n-2)$-форма в D такая, что $W \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $(1/p + 1/q = 1)$

$$\nu_1 \, |dW|^p \leq \, *(dW \wedge df), \tag{3.3.23}$$

$$|df| \leq \nu_2 \, |dW|^{p-1}, \;\; \nu_1, \, \nu_2 \equiv \mathrm{const} > 0, \tag{3.3.24}$$

$$\omega = W \wedge df. \tag{3.3.25}$$

Рассмотрим векторное поле E с однопараметрической группой преобразований $g_t(x)$, для которой:

i) существует точка $x(r)$ такая, что $x(r) \in g_t(\Sigma(r)) \subset g_s(\Sigma(r))$ при всех $0 < s < t$;

ii) $\lim_{t\to\infty} g_t(\Sigma(r)) = x(r)$;

iii) $\sup_{g_t(\Sigma(r))} ||dg_t(x)|| \leq Ae^{-\lambda t}$ для подходящих $A, \lambda > 0$;

iv) при каждом $x \neq x(r)$ существует единственная точка $y \in \partial D \cap \Sigma(r)$, для которой $x = g_t(y)$.

---

[2]Ср. [181, глава 5].

Докажем следующее неравенство типа неравенства Пуанкаре – Соболева. Указанное неравенство принадлежит В.А. Клячину [191].

Теорема 3.3.2 *Для всякой* $(n-1)$*-формы* ω *со свойствами* (3.3.23) – (3.3.25) *существует слабо замкнутая форма* ω_0 *вида* (3.3.23) – (3.3.25) *такая, что для почти всех* r *выполнено неравенство*

$$\left|\int\limits_{\Sigma(r)} \omega - \omega_0\right| \leq \lambda^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_2}{\nu_1} \int\limits_{\Sigma(r)} *d\omega,$$

где

$$\lambda = \int\limits_0^{+\infty} \sup_{y\in\partial\Sigma(t)} \left\{ |E(t,y)|^p \left(\int\limits_t^{+\infty} \frac{d(\tau)}{d(t)} d\tau \right)^{p-1} \right\} dt,$$

$$d(t) = \exp\left\{ \int\limits_0^t \mathrm{div} E(s,y) ds \right\},$$

и $\mathrm{div}E$ *означает дивергенцию векторного поля* E *на* $S(r)$.

Докажем предварительно две леммы. Предположим сперва, что функция $f \in C^1(D)$ и $W \in C^2(D)$. Пусть $x = (t,y)$ – произвольная точка и пусть X – $(n-2)$-вектор в точке x. Положим $X_\tau = dg_{\tau-t}(X)$, и

$$N(X) = -\int\limits_t^{+\infty} dW(E \wedge X_\tau) d\tau.$$

Лемма 3.3.4 *Мы имеем*

$$dN = dW.$$

Доказательство. Проверим сперва следующее равенство. Пусть w – $(n-2)$-форма, определяемая соотношением $w(Y) = N(E \wedge Y)$. Тогда

$$(L_E N)(X) = (dN)(E \wedge X) + dw(X).$$

Здесь L_E означает производную Ли вдоль поля E. В силу специфики в конструкции формы N и векторного поля X имеем

$$w \equiv 0\,, \quad L_E X = 0\,.$$

Таким образом, предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} N(X_t) = (dN)(E \wedge X_t).$$

Поскольку

$$N(X_t) = -\int\limits_t^{+\infty} dW(E \wedge X_\tau) d\tau\,,$$

то

$$(dW)(E \wedge X_t) = \frac{d}{dt} N(X_t) = (dN)(E \wedge X_t).$$

Предположим теперь, что $X = X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-2}$. Продолжим эти векторы до векторных полей на $g_t(\partial D)$ так, чтобы $L_{X_i} X_j = 0$. Эти векторные поля могут быть продолжены вдоль векторного поля E следующим образом: $X_i(\tau) = (dg_{\tau - t})(X_i)$. Тогда справедливо следующее равенство

$$L_E X_i = 0.$$

Далее воспользуемся известной дифференциально-геометрической формулой, которая в нашем специальном случае имеет вид

$$(dN)(X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}) = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{i-1} L_{X_i} N(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{n-2}).$$

Символ $\hat{}$ над X_i означает, что символ X_i опускается. Прямые вычисления, использующие условия iii) на векторное поле E, показывают, что $dN(X) = dW(X)$ для всех $(n-1)$-векторов X. $\square$

Лемма 3.3.5 *Если* $dx = J(t, y)\, dt\ dy$ *есть элемент* $(n-1)$*-объема на* $\Sigma(r)$*, то при всех* $0 \le t \le \tau$ *выполнено*

$$J(t, y) = J(\tau, y) \exp\left\{ \int\limits_t^\tau \operatorname{div} E(s, y) ds \right\}.$$

Доказательство. Пользуясь предложением 2.25 из [246], по определению дивергенции имеем

$$L_E(dx) = (\mathrm{div}E)\, dx$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial J(t,y)}{\partial t} = J(t,y)\,\mathrm{div}\, E(t,y).$$

Интегрированием этого равенства, получаем нужное. □

Доказательство теоремы 3.3.2. Отметим сначала, что если X_t как в лемме 3.3.4, то тем же самым способом, как и в лемме 3.3.5, проверяется

$$|E \wedge X_\tau| = |E \wedge X_t| \exp\left\{\int\limits_t^\tau \mathrm{div}\, E(s,y) ds\right\}. \tag{3.3.26}$$

Положим $W_0 = W - N$, $\omega_0 = W_0 \wedge df$. Так как $\omega_0 = 0$ на ∂D и для некоторого $(n-1)$-вектора X, $|X| = 1$, $\langle E, X\rangle = 0$, мы получаем

$$\int\limits_{\Sigma(r)} \omega - \omega_0 = \int\limits_{\Sigma(r)} N(X)\, df(\frac{E}{|E|}). \tag{3.3.27}$$

На основании леммы 3.3.4 и соотношения (3.3.26) получаем

$$
\begin{aligned}
|N(X)| &\le \int\limits_t^{+\infty} |dW(E \wedge X_\tau)\,|\,d\tau \le \\
&\le \int\limits_t^{+\infty} |dW||E \wedge X_\tau\,|\,d\tau = \\
&= \int\limits_t^{+\infty} |dW||E(t,y)|\,\exp\{\int\limits_t^{\tau} \operatorname{div}(s,y)ds\}\,d\tau = \\
&= \int\limits_t^{+\infty} |dW||E(t,y)|\,\frac{d(\tau)}{d(t)}.
\end{aligned}
$$

Пользуясь теперь неравенством Гельдера, находим

$$
\left|\int\limits_{\Sigma(r)} \omega - \omega_0\right| \le \left(\int\limits_{\Sigma(r)} |N|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Sigma(r)} |df|^{p/(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}.
$$

В силу (3.3.27), мы вправе заключить теперь, что

$$
\left(\int\limits_{\Sigma(r)} |N|^p\right) \le \int\limits_{\Sigma(r)} |E(t,y)|^p \left(\int\limits_t^{\infty} |dW|^p \frac{d(\tau)}{d(t)}\right) \left(\int\limits_t^{\infty} \frac{d(\tau)}{d(t)}\right)^{p-1} =
$$

$$
= \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\partial D \cap \Sigma(r)} |E(t,y)|^p J(0,y)d(t) \left(\int\limits_t^{+\infty} |dW|^p \frac{d(\tau)}{d(t)}\right) \left(\int\limits_t^{\infty} \frac{d(\tau)}{d(t)}\right)^{p-1} dy \le
$$

$$\leq \lambda \int\limits_{\Sigma(r)} |dW|^p \,, \tag{3.3.28}$$

где

$$\lambda = \int\limits_0^{+\infty} \sup_{y\in\partial\Sigma(t)} \left\{ |E(t,y)|^p \left(\int\limits_t^{+\infty} \frac{d(\tau)}{d(t)} \right)^{p-1} \right\} dt.$$

Используя (3.3.23) – (3.3.25) и (3.3.28), приходим к неравенству

$$\left| \int\limits_{\Sigma(r)} \omega - \omega_0 \right| \leq \lambda^{\frac{1}{p}} \frac{\nu_2}{\nu_1} \int\limits_{\Sigma(r)} *d\omega.$$

Предположим теперь, что $W \in W^{1,p}_{\text{loc}}$, $f(x) \in W^{1,q}_{\text{loc}}$, $1/p + 1/q = 1$. Мы можем найти $W_k \to W$ в $W^{1,p}_{\text{loc}}$, $W_k \in C^2$, и $f_k \to f$ в $W^{1,q}_{\text{loc}}$, $f_k \in C^1$. Пусть N_k – $(n-2)$-формы построенные как в лемме 3.3.4 с помощью W_k. Положим $\theta_k = (W_k - N_k) \wedge df_k$. Как при доказательстве леммы 3.3.4, мы построим также форму N . Заметим, что N определена почти всюду в D. Так как $dW \in L_p$, то на основании теоремы Фубини и вышеприведенных аргументов мы заключаем, что $N \in L_p$ и $N_k \to N$ в L_p. Отсюда мы можем установить, что $(W - N) \wedge df$ является слабо замкнутой формой.

Для произвольной функции $\psi \in \mathrm{Lip}\,(D)$, $\mathrm{supp}\,\psi \subset\subset D$ имеем

$$\left|\int\limits_D d\psi \wedge (W-N)\wedge df\right| =$$

$$= \left|\int\limits_D d\psi \wedge (W - W_k + W_k - N_k + N_k - N)\wedge (df - df_k + df_k)\right| \leq$$

$$\leq ||d\psi||_{L_\infty}\cdot ||W-W_k||_{L_p}\cdot ||df_k||_{L_q} + ||d\psi||_{L_\infty}\cdot ||N_k - N||_{L_p}\cdot ||df_k||_{L_q} +$$

$$+ ||d\psi||_{L_\infty}||W-N||_{L_p}\cdot ||df - df_k||_{L_q} + \left|\int\limits_D d\psi\wedge\theta_k\right|.$$

Последнее слагаемое есть нуль, поскольку форма θ_k замкнута. Используя теорему Фубини, как и выше, приходим к теореме 3.3.2. $\square$

3.3.4 Два иллюстрирующих примера

В первом примере предположим, что $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ такая, что множества $\Sigma(r)$ односвязны. Обозначим через $R(r)$ радиус описанного вокруг $\Sigma(r)$ геодезического шара $H(r)$ и через $D' = \cup_r H(r)$. Очевидно, что $\varepsilon_D(r) \geq \varepsilon_{D'}(r)$. Если ρ – геодезическое расстояние на $S(r)$ от центра шара $H(r)$, то

$$\mathrm{div}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{n-2}{r}\,\mathrm{ctg}\,\rho/r.$$

Положим теперь $E = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$. Поскольку

$$\mathrm{div}\,E = -1 - \rho\frac{n-2}{r}\,\mathrm{ctg}\,\rho/r$$

и

$$|E(t,y)| = \rho = Re^{-t},\ \ 0 < t < +\infty,$$

где
$$dt = -\frac{d\rho}{\rho},$$
то на основании теоремы 3.3.2 имеем
$$\lambda = \int\limits_0^{+\infty} R^p e^{-pt} \left(\int\limits_t^{+\infty} e^{-(\tau - t)} \left(\frac{\sin Re^{-\tau}/r}{\sin Re^{-t}/r} \right)^{n-2} d\tau \right)^{p-1} dt.$$
В частности, справедлива оценка
$$\varepsilon_D(r) \geq p^{1/p}(n-1)^{(p-1)/p} \frac{1}{R} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} \left(\frac{\sin R/r}{R/r} \right)^{(p-1)(n-2)/p}.$$

Другой пример. Пусть теперь $\mathbf{H}^n(k)$ – пространство Лобачевского постоянной кривизны $-k^2$. Положим $\mathcal{M} = \mathbf{H}^n(k)$. Пусть D – подобласть в $\mathbf{H}^n(k)$ такая, что множества $\Sigma(r)$ односвязны. Обозначим через $R(r)$ радиус описанного вокруг $\Sigma(r)$ геодезического шара $H(r)$ и через $D' = \cup_r H(r)$. Очевидно, что $\varepsilon_D(r) \geq \varepsilon_{D'}(r)$. Если ρ – геодезическое расстояние на $S(r)$, то
$$\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{(n-2)k}{\sinh kr} \operatorname{ctg} \frac{k\rho}{\sinh kr}.$$
Выберем $E = -\rho\, \partial/\partial\rho$. По теореме 3.3.2 получаем
$$\lambda = \int\limits_0^{+\infty} R^p \cdot e^{pt} \left(\int\limits_t^{+\infty} e^{-(\tau - t)} \left(\frac{\sin (kRe^{-\tau}/\sinh kr)}{\sin (kRe^{-t}/\sinh kr)} \right)^{n-2} d\tau \right)^{p-1} dt.$$
В частности,
$$\varepsilon_D(r) \geq p^{1/p}(n-1)^{(p-1)/p} \frac{1}{R} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} \left(\frac{(\sinh kr) \cdot \sin \frac{kR}{\sinh kr}}{kR} \right)^{(p-1)(n-2)/p}.$$

3.4 Квазиконформно плоские поверхности $\operatorname{codim} = 1$

Пусть $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное некомпактное риманово многообразие, $\dim \mathcal{X} = n$. Рассмотрим локально квазиконформно плоскую гиперповерхность Π в $\mathcal{X}$. Фиксируем произвольно точку $a \in \Pi$, радиус R, $0 < R < R_a$ и квазиконформное отображение $f : B_{\mathcal{X}}(a, R) \to B(0, 1)$, для которого $f(\Pi(a, R)) \subset \Pi_0$. Гиперповерхность $\Pi(a, R)$ разбивает шар $B_{\mathcal{X}}(a, R)$ на две подобласти

$$\Delta^+ = f^{-1}(B_+) \quad \text{и} \quad \Delta^- = f^{-1}(B_-)$$

таким образом, что $\Delta^+ \cup \Pi(a, R) \cup \Delta^- = B_{\mathcal{X}}(a, R)$. Здесь

$$B_\pm = B(0, 1) \cap \mathbb{R}^n_\pm \,.$$

Пусть $\gamma \subset B_{\mathcal{X}}(a, R)$ – непрерывный путь, выходящий из точки $x_0 \in B_{\mathcal{X}}(a, R)$. Будем называть путь γ *расходящимся* в $B_{\mathcal{X}}(a, R)$, если

$$\overline{\gamma} \cap (\mathcal{X} \setminus B_{\mathcal{X}}(a, R)) \neq \emptyset \,.$$

Будем говорить, что множество $\Gamma \subset \Delta^+$ отделяет точку $a \in \overline{\Delta^+}$, если для всякого расходящегося в $B_{\mathcal{X}}(a, R)$ пути $\gamma \subset \Delta^+$ с началом в точке a выполнено $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Для произвольного r, $0 < r < R$ пусть $S^+_{\mathcal{X}}(a, r)$ означает связную компоненту множества $S_{\mathcal{X}}(a, r) \setminus \Pi$ содержащуюся в Δ^+ и отделяющую точку $a \in \Pi$ в Δ^+. Пусть $B^+_{\mathcal{X}}(a, r)$ означает множество всех $x \in \Delta^+$, отделяемых в Δ^+ гиперповерхностью $S^+_{\mathcal{X}}(a, r)$. Ясно при этом, что $\partial' B^+_{\mathcal{X}}(a, r) = S^+_{\mathcal{X}}(a, r)$. Пусть $S^-_{\mathcal{X}}(a, r)$ и $B^-_{\mathcal{X}}(a, r)$ означают соответствующие величины для области Δ^-. Положим

$$I^\pm(a, r) = \int_{B^\pm_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \,,$$

где $*\mathbb{1}_{\mathcal{X}}$ – элемент n-мерного объема в $\mathcal{X}$.

Далее нам потребуются два простых утверждения, хорошо известных для квазиконформных отображений областей евклидова пространства. Первое из них нам будет необходимо, в частности, для вычисления меры образа $B^\pm_{\mathcal{X}}(a, r)$ при квазиконформных отображениях.

Лемма 3.4.1 *Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – квазиконформное отображение. Тогда для произвольного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и для произвольной измеримой функции $\chi : E \to \mathbb{R}$ выполнено*

$$\int\limits_E \chi(y) \, * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{f^{-1}(E)} \chi(f(x)) \, J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \, . \tag{3.4.1}$$

Доказательство. В очень общей форме соотношение (3.4.1) доказано в [241]. Мы дадим здесь совсем простое доказательство. Действительно, фиксируем покрытие $\{U_i\}$ многообразия $\mathcal{X}$ областями U_i, $i = 1, 2, \ldots$, с системой локальных C^2-гладких координат в каждой U_i. Не уменьшая общности можем предполагать, что каждая из карт $t = \tau_i(x) : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, является квазиизометрической, т.е. для произвольной пары точек $x', x'' \in U_i$ выполнено

$$A_i \, d(x', x'') \le |\tau_i(x') - \tau_i(x'')| \le B_i \, d(x', x'') \tag{3.4.2}$$

с некоторыми постоянными A_i, $B_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$

По теореме 1 [97, глава I] существует локально конечное разбиение единицы $\sum_i \phi_i$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Мы имеем

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} \chi(f(x)) \, J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{f^{-1}(E)} \sum_i \phi_i(x) \, \chi(f(x)) \, J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} =$$

$$= \sum_i \int\limits_{U_i \cap f^{-1}(E)} \phi_i(x) \, \chi(f(x)) \, J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \, .$$

Так как отображение $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – K-квазиконформно, а отображения τ_i – билипшицевы, то отображения

$$\tilde{f}_i = f \circ \tau_i^{-1} : \tau(U_i) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

являются K_i-квазиконформными с некоторыми постоянными $K_i \ge 1$, зависящими от K, A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Пользуясь формулой замены переменной для квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$

[99, теоремы 2.2 и 6.2], находим

$$\int\limits_{U_i\cap f^{-1}(E)} \phi_i(x)\,\chi(f(x))\,J(x,f)\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}} =$$

$$= \int\limits_{\tau_i^{-1}(U_i\cap f^{-1}(E))} \phi_i(\tau_i^{-1}(t))\,\chi(\tilde{f}_i(t))\,J(t,\tilde{f}_i)\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n =$$

$$= \int\limits_{f(U_i)\cap E} \phi_i(f^{-1}(y))\,\chi(y)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\,.$$

Отсюда,

$$\int\limits_{f^{-1}(E)} \chi(f(x))\,J(x,f)\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \sum\nolimits_i \int\limits_{f(U_i)\cap E} \phi_i(f^{-1}(y))\,\chi(y)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n =$$

$$= \sum\nolimits_i \int\limits_{E} \phi_i(f^{-1}(y))\,\chi(y)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n =$$

$$= \int\limits_{E} \sum_i \phi_i(f^{-1}(y))\,\chi(y)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n =$$

$$= \int\limits_{E} \chi(y)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\,,$$

и (3.4.1), действительно, справедливо. □

Для квазиконформных отображений областей евклидова пространства следующее неравенство можно найти в [99, стр. 35].

Лемма 3.4.2 *Для почти всех r, $0<r<R_a$, выполнено*

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(f(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r))\right) \le \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{3.4.3}$$

где $d\mathcal{H}^{n-1}$ – элемент $(n-1)$-меры Хаусдорфа на $S_{\mathcal{X}}(a,r)$.

Доказательство. Так как отображение $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}^n$ квазиконформно, обратное отображение $f^{-1}: f(\mathcal{X})\subset\mathbb{R}^n\to\mathcal{X}$ также квазиконформно.

Поскольку $d(a,x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{X}$, то функция $\tilde{d}(y) = d(a, f^{-1}(y))$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\rm loc}(f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,R_a)))$. По теореме 12 статьи [162] для почти всех r, $0 < r < R_a$, множества уровня

$$E_r = \{y \in f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,R_a)) : \tilde{d}(y) = r\}$$

являются счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемыми и, в частности, имеют σ-конечную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа.

Фиксируем произвольно r_1, r_2 так, чтобы $0 < r_1 < r_2 < R_a$. В силу цитированной выше теоремы 12 из [162], находим

$$\begin{aligned} \int\limits_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r)\,dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{f(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r))} |\nabla \tilde{d}(y)|\, \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla \tilde{d}(y)|} = \\ = \int\limits_{r_1<\tilde{d}(y)<r_2} |\nabla \tilde{d}(y)|\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\,. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Данное утверждение справедливо в предположении конечности интеграла в левой части соотношения. Это будет ясно из дальнейшего.

Пусть $f^{-1} = g$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{d}(y)| &= |\nabla d(a, g(y))| = \\ &= |\,(g'(f(x)))\, \nabla_x d(a,x)| = \\ &= |\,(f'(x))^{-1}\, \nabla_x d(a,x)|\,. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Таким образом, из предыдущего равенства на основании леммы 3.4.1 будем иметь

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r)\,dr = \int\limits_{r_1<d(a,x)<r_2} |\,(f'(x))^{-1}\, \nabla_x d(x,a)| \det(f'(x)) * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Пусть $x \in \mathcal{X}$ – точка, в которой определено линейное отображение $f'(x) : T_x(\mathcal{X}) \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$. Найдем в $T_x(\mathcal{X})$ и в $\mathbb{R}^n$ ортонормальные системы векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ такие, что $f'(\mathbf{u}_i) = \lambda_i\, \mathbf{v}_i$, где λ_i

– некоторые постоянные ($i = 1, \ldots, n$). Выбирая в $T_x(\mathcal{X})$ и $\mathbb{R}^n$ соответствующие системы координат, можно записать

$$f'(x) = \left(\begin{array}{c} \lambda_1\ 0 \ldots 0 \\ \\ 0\ \ \lambda_2 \ldots 0 \\ \\ \ldots\ldots\ldots \\ \\ 0\ \ 0 \ldots \lambda_n \end{array} \right) \quad \text{и} \quad (f'(x))^{-1} = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\lambda_1}\ 0 \ldots 0 \\ \\ 0\ \frac{1}{\lambda_2} \ldots 0 \\ \\ \ldots\ldots\ldots \\ \\ 0\ \ 0\ \ldots \frac{1}{\lambda_n} \end{array} \right).$$

При этом, предполагая $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, имеем

$$|f'(x)| = \lambda_n\,, \quad |(f'(x))^{-1}| = \lambda_1^{-1} \quad \text{и} \quad \det\,(f'(x)) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n\,.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} &|\,(f'(x))^{-1}\,\nabla_x d(a,x)|\,|\det\,(f'(x))| = \\ &= \left|(f'(x))^{-1}\,\frac{\nabla_x d(a,x)}{|\nabla_x d(a,x)|}\right|\,|\nabla_x d(a,x)|\,\textstyle\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \\ &\leq |(f'(x))^{-1}|\,|\nabla_x d(a,x)|\,\textstyle\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \\ &\leq \textstyle\prod_{i=2}^n \lambda_i\,|\nabla d(a,x)| \leq |f'(x)|^{n-1}|\nabla d(a,x)|\,. \end{aligned}$$

Тем самым, приходим к соотношению

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r)\,dr \leq \int\limits_{r_1<d(x,a)<r_2} |f'(x)|^{n-1}|\nabla d(a,x)|\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Функция $d(a,x)$ удовлетворяет условию Липшица. По формуле Кронрода – Федерера для липшицевых функций на многообразиях (см. [20, раздел **2.4** главы 3]) мы можем записать

$$\int\limits_{r_1<d(x,a)<r_2} |f'(x)|^{n-1}|\nabla d(a,x)|\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r)\,dr \le \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^{n-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Разделим обе части неравенства на $r_2 - r_1$ и перейдем к пределу при $r_2 \to r_1$. На основании теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла по переменному пределу интегрирования, легко убеждаемся в справедливости (3.4.3) для почти всех $r \in (0, R_a)$. □

Возвратимся к оценке интеграла энергии. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\mathcal{Y}$ – произвольное риманово многообразие с изопериметрическим профилем $\theta_{\mathcal{Y}}$. Условие квазиконформности (3.2.15) вместе с соотношением (3.4.1) влекут:

$$K^{-1} I^{\pm}(a,r) = K^{-1} \int_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \mathcal{H}^n \left(f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \right) .$$

В силу (3.3.2), замечаем, что

$$\theta_{\mathbb{R}^n_{\pm}} \left(\mathcal{H}^n \left(f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \right) \right) \le \mathcal{H}^{n-1} \left(f(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \right) .$$

С использованием (3.4.1) и (3.4.3), предыдущее неравенство тогда дает

$$\begin{aligned} L_1^{n/(n-1)} K^{-1} I^{\pm}(a,r) &\le L_1^{n/(n-1)} \int_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \\ &= L_1^{n/(n-1)} \mathcal{H}^n \left(f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \right) \le \\ &\le \left(\mathcal{H}^{n-1} \left(f(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \right) \right)^{n/(n-1)} \le \\ &\le \left(\int_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{n/(n-1)} \le \\ &\le \left(\mathcal{H}^{n-1} \left(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r) \right) \right)^{1/(n-1)} \int_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Пользуясь еще раз формулой Кронрода – Федерера для ко-площади и, замечая, что $|\nabla d(a,x)| = 1$ почти всюду на $\mathcal{X}$, имеем

$$I^{\pm}(a,r) = \int\limits_0^r dt \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,t)} |f'(x)|^n \, \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla d(a,x)|} = \\ = \int\limits_0^r dt \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,t)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{3.4.6}$$

т.е. для почти всех r, $0 < r < R_a$,

$$\frac{d}{dr}\, I^{\pm}(a,r) = \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{3.4.7}$$

Тем самым, предыдущее неравенство может быть переписано в виде

$$c_1(n,K)\,\alpha^{\pm}(a,r) \le \frac{1}{I^{\pm}(a,r)}\,\frac{d}{dr} I^{\pm}(a,r) \quad \text{для почти всех} \quad r > 0\,,$$

где

$$\alpha^{\pm}(a,r) = \left(\mathcal{H}^{n-1}\left(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)\right)\right)^{1/(1-n)}$$

и

$$c_1(n,K) = L_1^{n/(n-1)} K^{-1} = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)} \Big/ \left(K\, 2^{1/(n-1)}\right).$$

Интегрируя данное дифференциальное неравенство от r до R при $0 < r < R < R_a$, выводим

$$c_1(n,K) \int_r^R \alpha^{\pm}(a,t)\, dt \le \ln \frac{I^{\pm}(a,R)}{I^{\pm}(a,r)}\,. \tag{3.4.8}$$

Случай 2. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса [86, раздел 2.4.2], для почти всех $r \in (0, R_a)$ можем записать

$$\int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{\partial B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} f_1\, df_2 \wedge \ldots \wedge df_n \tag{3.4.9}$$

(пояснения см. ниже). Однако, гиперповерхность Π является квазиконформно плоской и потому $f_n|_{\Pi} = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f) \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} f_1\, df_2 \wedge \ldots \wedge df_n\,. \tag{3.4.10}$$

Соотношения (3.4.9) и (3.4.10) не нуждаются в пояснениях для случая C^2-гладких отображений. В случае гомеоморфизмов $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$ аппроксимируем f гладкими отображениями $f_k : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ со свойствами:

i) $f_k \to f$ локально равномерно в $\mathcal{X}$ при $k \to \infty$;

ii) для всякой подобласти $D \subset\subset \mathcal{X}$ при $k \to \infty$ выполнено

$$|f'_k(x) - f'(x)|_{L^n(D)} \to 0\,.$$

Нетрудно видеть, что такая аппроксимация возможна, если воспользоваться известной техникой приближения соболевских функций сглаживающими средними (см., например, [11, §5 главы II] или [148, раздел **4.2.1**]). Действительно, зафиксируем произвольно

$$r_1,\, r_2\,, \quad 0 < r_1 < r_2 < R_a\,.$$

Пользуясь соотношением (3.4.9) для гладких функций, доказываем равенство

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f_k) \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{\partial B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} f_{k\,1}\, df_{k\,2} \wedge \ldots \wedge df_{k\,n}\,.$$

Так как $f_k \to f$ равномерно на $B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)$ и $f_1|_{\Pi} = 0$, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f) \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} f_1\, df_2 \wedge \ldots \wedge df_n\,.$$

Теперь, как и выше, разделим обе части этого равенства на $r_2 - r_1$. Переходя к пределу при $r_2 \to r_1$, убеждаемся в справедливости (3.4.10) для почти всех r, $0 < r < R_a$.

Пользуясь (3.4.10), для почти всех r, $0 < r < R_a$, находим

$$\begin{aligned}\int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} &\le K \int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f) \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \\ &= K \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} f_1 \, df_2 \wedge \ldots \wedge df_n \le \\ &\le K \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f_1| \, |df_2 \wedge \ldots \wedge df_n| \, d\mathcal{H}^{n-1} \, .\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Оценим норму $(n-1)$-формы $df_2 \wedge \ldots \wedge df_n$. Так как форма $df_2 \wedge \ldots \wedge df_n$ простая, то

$$\begin{aligned}|df_2 \wedge \ldots \wedge df_n|^2 &= \langle df_2 \wedge \ldots \wedge df_n, \, df_2 \wedge \ldots \wedge df_n \rangle \\ &= \langle \nabla f_2 \wedge \ldots \wedge \nabla f_n, \, \nabla f_2 \wedge \ldots \wedge \nabla f_n \rangle \\ &\le \textstyle\prod_{i=2}^n |\nabla f_i|^2 \, .\end{aligned}$$

В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим,

$$\left(\prod_{i=2}^n |\nabla f_i|^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \le \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |\nabla f_i|^2$$

и потому

$$|\nabla f_2 \wedge \ldots \wedge \nabla f_n| \le \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |\nabla f_i|^2 \right)^{(n-1)/2} \, . \tag{3.4.12}$$

Далее, для произвольного вектора $h \in T_x(\mathcal{X})$ выполнено

$$|f'(x) \, h|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f_i, h \rangle^2 \, ,$$

а потому, полагая здесь $h = \nabla f_k / |\nabla f_k|$, будем иметь

$$|\nabla f_k|^2 + \frac{1}{|\nabla f_k|^2} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \langle \nabla f_i, \nabla f_k \rangle^2 \le |f'|^2 .$$

Тем самым, из (3.4.12) следует

$$|df_2 \wedge ... \wedge df_n| \le |f'|^{n-1} .$$

Пользуясь неравенством Гельдера, имеем

$$\int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f_1| \cdot |f'|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n} \left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{(n-1)/n} . \qquad (3.4.13)$$

Рассмотрим произвольную локальную C^2-карту $t = \tau(x) : U \to \mathbb{R}^n$ многообразия $\mathcal{X}$ со свойством (3.4.2). Функция $\tilde{d}(t) = d(a, \tau^{-1}(t))$ липшицева в области $\tau(U)$ и, следовательно, имеет ограниченную вариацию в $\tau(U)$ (см., например, [148, раздел **5.1**]). По теореме 1 раздела **5.5** [148] почти все поверхности уровня функции $\tilde{d}$ имеют конечный периметр в смысле Де Джорджи. Поэтому на основании теоремы 2 раздела **5.7** [148], можно заключить, что почти все поверхности уровня являются с точностью до $\mathcal{H}^{n-1}$-меры нуль C^1-гладкими гиперповерхностями и, в частности, почти всюду имеют касательные плоскости. Поскольку C^2-гомеоморфизм $\tau : U \to \mathbb{R}^n$ билипшицев, это же высказывание верно для почти всех поверхностей $S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a, r)$.

Фиксируем поверхность $S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a, r)$, $r \in (0, R_a)$, с указанными свойствами. Поскольку

$$f(\partial S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a, r)) \subset \Pi_0 ,$$

то $f_1|_{\partial S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} = 0$ и, в силу определения основной частоты множества

$S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)$, получаем

$$\left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f_1|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r))} \left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |\nabla_S f_1|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} . \tag{3.4.14}$$

Пусть $x \in S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)$ – точка, в которой $S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)$ имеет касательную плоскость, а отображение f дифференциал. Поскольку

$$|\nabla_S f_1| \leq |\nabla f_1| \leq |f'(x)| \, ,$$

то в силу (3.4.14) находим

$$\left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{\lambda^{\pm}(a,r)} \left(\int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} ,$$

где обозначено

$$\lambda^{\pm}(a,r) = \lambda(S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \, .$$

Вспоминая теперь (3.4.13), получаем

$$\int\limits_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'(x)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\lambda^{\pm}(a,r)} \int\limits_{S^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} |f'|^n \, d\mathcal{H}^{n-1} \, .$$

В силу (3.4.7), приходим к дифференциальному неравенству

$$\lambda^{\pm}(a,r) I^{\pm}(a,r) \leq \frac{d}{dr} I^{\pm}(a,r) \, .$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int\limits_r^R \lambda^{\pm}(a,t) \, dt \leq \ln \frac{I^{\pm}(a,R)}{I^{\pm}(a,r)} \, . \tag{3.4.15}$$

Неравенства (3.4.8) и (3.4.15) дают нам необходимые оценки для интеграла энергии. Именно, имеет место

Лемма 3.4.3 *Пусть $\mathcal{X}$ – $n-$мерное связное некомпактное риманово многообразие без края. Пусть Π – локально квазиконформно плоская гиперповерхность в $\mathcal{X}$. Зададим произвольно точку $a \in \Pi$, радиус R, $0 < R < R_a$, и квазиконформное отображение $f : B_{\mathcal{X}}(a, R) \to B(0,1)$ такое, что $f(\Pi(a,R)) \subset \Pi_0$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ выполнено*

$$\exp\left\{ c_1(n,K) \int\limits_r^R \big(\alpha^+(a,t) + \alpha^-(a,t)\big)\, dt \right\} \le \frac{I^+(a,R) I^-(a,R)}{I^+(a,r) I^-(a,r)} \qquad (3.4.16)$$

и

$$\exp\left\{ \int\limits_r^R \big(\lambda^+(a,t) + \lambda^-(a,t)\big)\, dt \right\} \le \frac{I^+(a,R) I^-(a,R)}{I^+(a,r) I^-(a,r)}\,. \qquad (3.4.17)$$

Для **доказательства** потенцируем неравенства (3.4.8). Мы получаем

$$\exp\left\{ c_1(n,K) \int_r^R \alpha^{\pm}(a,t)\, dt \right\} \le \frac{I^{\pm}(a,R)}{I^{\pm}(a,r)}\,.$$

Перемножив эти неравенства, приходим к (3.4.16).

Неравенство (3.4.17) следует из (3.4.15) аналогичным образом. □

Укажем два свойства K-квазиконформно плоских гиперповерхностей в римановых многообразиях. Для описания этих свойств мы вводим некоторые специальные величины, количественно характеризующие способ рассечения многообразия K-квазиплоскостью. Именно, мы доказываем следующий результат.

Теорема 3.4.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — $n-$мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Если Π^{n-1} — K-квазиплоскость в $\mathcal{X}$, то для всякой точки $a \in \Pi^{n-1}$ и произвольной пары чисел*

$$r, R, \quad 0 < r < R < R_a\,,$$

выполняются соотношения

$$\int\limits_r^R \big(\alpha^+(a,t) + \alpha^-(a,t)\big)\; dt \le \frac{1}{n}\, 2^{1/(n-1)}\, \omega_{n-1}^{1/(1-n)}\, c_0(K, r, R)$$

и

$$\int_r^R \big(\lambda^+(a,t) + \lambda^-(a,t)\big)\; dt \leq c_0(K,r,R),$$

где

$$c_0(K,r,R) = K\,\ln\left(K^{(4n-2)/(n-1)}\,D^{2n}(a,r)D^{2n}(a,R)\ln^{2n}\frac{R}{r}\right)\,.$$

Здесь величина

$$\alpha^+(a,t) + \alpha^-(a,t)$$

в левой части первого из неравенств выражается через $(n-1)$-мерные меры частей геодезической сферы $S_{\mathcal{X}}(a,t)$, на которые она разрезается квазиплоскостью Π^{n-1}; величина

$$\lambda^+(a,t) + \lambda^-(a,t)$$

в левой части второго из неравенств выражается через основные частоты этих частей (точные определения были даны выше); $D(a,\rho)$ — некоторая величина, связанная с геометрическим строением многообразия $\mathcal{X}$ в геодезическом шаре $B_{\mathcal{X}}(a,\rho)$ (см. раздел 5), и, наконец, ω_{n-1} — площадь $(n-1)$-мерной сферы радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$.

В случае $n=2$ оба условия совпадают.

Доказательство опирается на указанные выше специальные оценки интеграла Дирихле квазиконформного отображения по связным кускам геодезического шара $B_{\mathcal{X}}(a,\rho)$ с центром в точке $a\in\Pi$, на которые квазиплоскость разрезает многообразие (лемма 3.4.3).

Пусть $\mathcal{X}$ – $n-$мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Рассмотрим K-квазиконформное отображение $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}^n$. Для произвольной точки $a\in\mathcal{X}$ и всякого r, $0<r<R_a$, имеем

$$\begin{aligned} I^{\pm}(a,r) \;&\geq \int_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x,f)\,dx \\ &= \operatorname{vol} f(B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,r)) \geq \tfrac{\Omega_n}{2}\, l^n(a,r)\,, \end{aligned}$$

где символ Ω_n означает объем единичного шара $B(0,1)\subset\mathbb{R}^n$. Аналогично, для всякого $r<R<R_a$ выполнено

$$I^{\pm}(a,R)\le K\int_{B^{\pm}_{\mathcal{X}}(a,R)} J(x,f)\,dx\le \frac{K}{2}\,\Omega_n\,L^n(a,R)\,.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{I^+(a,R)I^-(a,R)}{I^+(a,r)I^-(a,r)}\le K^2\,\frac{L^{2n}(a,R)}{l^{2n}(a,r)}\,. \tag{3.4.18}$$

Пользуясь оценкой (3.2.31), приходим к соотношению

$$\frac{L(a,R)}{l(a,r)}=\frac{L(a,R)}{l(a,R)}\,\frac{l(a,R)}{L(a,r)}\,\frac{L(a,r)}{l(a,r)}\le D(a,r)\,D(a,R)\,\frac{l(a,R)}{L(a,r)}\,. \tag{3.4.19}$$

Легко видеть, что

$$\frac{l(a,R)}{L(a,r)}\le K^{1/(n-1)}\,\ln\frac{R}{r}\,. \tag{3.4.20}$$

Действительно, предполагая, что $l(a,R)>L(a,r)$ и вычисляя n-емкость сферического конденсатора в $\mathbb{R}^n$, находим

$$\begin{aligned}\omega_{n-1}\left(\ln\frac{l(a,R)}{L(a,r)}\right)^{1-n} &= \operatorname{cap}_n\,\big(B(f(a),L(a,r)),B(f(a),l(a,R))\big)\ge\\ &\ge \operatorname{cap}_n\,\left(f\overline{B}(a,r),fB(a,R)\right)\ge\\ &\ge \tfrac{1}{K}\operatorname{cap}_n\,\left(\overline{B}(a,r),B(a,R)\right)=\\ &= \tfrac{1}{K}\,\omega_{n-1}\left(\ln\tfrac{R}{r}\right)^{1-n}\,,\end{aligned}$$

откуда оценка (3.4.20) следует с очевидностью.

Таким образом, на основании (3.4.19) и (3.4.20) мы получаем

$$\frac{L(a,R)}{l(a,r)}\le K^{1/(n-1)}\,D(a,r)\,D(a,R)\,\ln\frac{R}{r}\,. \tag{3.4.21}$$

Используя (3.4.18) и (3.4.21), приходим к следующему результату.

Лемма 3.4.4 *Пусть* Π — K*-квазиплоская гиперповерхность в* $\mathcal{X}$. *Тогда в каждой точке* $a \in \Pi$ *и для произвольных* t, R, $0 < t < R < R_a$, *выполнено*

$$\frac{I^+(a,R)I^-(a,R)}{I^+(a,t)I^-(a,t)} \leq K^{(4n-2)/(n-1)}\, D^{2n}(a,t)D^{2n}(a,R)\ln^{2n}\frac{R}{t}\,.$$

На основании леммы 3.4.3 и леммы 3.4.4 приходим к основному результату настоящей главы — теореме 3.4.1.

Случай $n = 2$**:** Неравенство Виртингера [12, теорема 7 главы V] влечет

$$\lambda^{\pm}(a,t) = \lambda(S^{\pm}(a,t)) = \frac{\pi}{\mathcal{H}_1(S^{\pm})}\,,$$

где $S^{\pm} = S^{\pm}(a,t)$.

Таким образом, в данном случае оба соотношения в теореме 3.4.1 совпадают. Здесь мы получаем

Следствие 3.4.1 *Если* Π^1 — K*-квазипрямая в двумерном римановом многообразии* $\mathcal{X}$, *то для любых* $a \in \Pi^1$ *и* r, R, $0 < r < R < R_a$, *выполнено*

$$\int\limits_r^R \left(\frac{1}{\mathcal{H}^1(S^+)} + \frac{1}{\mathcal{H}^1(S^-)}\right) dt \leq \frac{K}{\pi}\ln\left(K^6\, D^4(a,r)D^4(a,R)\, \ln^4\frac{R}{r}\right)\,.$$

С использованием оценки (3.2.35) результаты [23], [202] о квазиплоскостях в $\mathbb{R}^n$ легко выводятся из теоремы 3.4.1.

3.5 Квазиконформно плоские поверхности $\operatorname{codim} > 1$

Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Пусть $1 \le k \le n-2$ и

$$f = (f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$$

– K-квазиконформное отображение.

Пусть далее Π_0^k – k-мерная плоскость вида

$$\Pi_0^k = \{y = (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) : y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\} .$$

Далее мы будем изучать свойства k-мерной поверхности

$$\Pi^k = f^{-1}(\Pi_0^k) .$$

Случай $k = n-1$ рассматривался ранее. В этом разделе мы дадим набросок соответствующей теории для общего случая $1 \le k < n-1$.

Фиксируем точку $a \in \Pi$. Для произвольного $R, \quad 0 < R < R_a$, пусть $\Pi(a,R)$ – компонента связности множества $\Pi^k \cap B_{\mathcal{X}}(a,R)$, содержащая точку a, и пусть $\Sigma(a,R) = S_{\mathcal{X}}(R) \setminus \overline{\Pi(a,R)}$.

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i-k-1} f_i \, df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n .$$

Ясно, что для почти всех $R \in (0, R_a)$ выполняется

$$\omega \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(S_{\mathcal{X}}(a,R)) , \quad \omega|_{\partial\Sigma(R)} = 0 .$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} d\omega \ &= \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i-k-1} df_i \wedge \, df_{k+1} \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n = \\ &= (n-k) df_1 \wedge \ldots \wedge df_n \end{aligned}$$

и, тем самым,

$$*d\omega = (n-k) \, J(x,f) \ge 0 .$$

Как и выше, полагаем

$$\varepsilon_K(a,R) = \inf_f \sup_{\omega_0} \int\limits_{\Sigma(R)} (*d\omega) \, d\mathcal{H}^{n-1} \Bigg/ \left| \int\limits_{\Sigma(R)} (\omega - \omega_0) \right| ,$$

где $\Sigma(R) = \Sigma(a, R)$, точная верхняя грань берется по всем слабо замкнутым формам

$$\omega_0 \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(S_{\mathcal{X}}(a, R_a))\,, \quad \omega_0|_{\partial\Sigma(R)} = 0\,, \quad \deg\omega_0 = n-1\,,$$

и точная нижняя грань — по всем K-квазиконформным отображениям f, $f(\Pi^k) = \Pi_0$.

Введем обозначение

$$V(a, R) = \int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,r)} J(x, f) \,*\, \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Так как $\mathcal{H}^n(\Pi_0) = 9$, то $\mathcal{H}^n(\Pi^k) = 0$ и для почти всех $r \in (0, R_a)$ выполнено

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Pi^k \cap S_{\mathcal{X}}(a, r)) = 0\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Sigma(a,r)} \omega_0 = \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,r)\setminus\Pi^k} \omega_0 = \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,r)} \omega_0\,.$$

По формуле Остроградского – Гаусса для произвольной, слабо замкнутой формы ω_0 описанного вида и произвольного $0 < R < R_a$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma(a,R)} (\omega - \omega_0) &= \int\limits_{S_{\mathcal{X}}(a,R)} (\omega - \omega_0) = \\ &= \int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,R)} d(\omega - \omega_0) = \int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,R)} d\omega = \int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,R)} (*d\omega) \,*\, \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \\ &= (n-k) \int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a,R)} J(x, f) \,*\, \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\,,\end{aligned}$$

т.е.

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)} (\omega - \omega_0) == (n-k)V(a, R)\,. \tag{3.5.1}$$

Здесь мы использовали, что $f_i|_{\Pi^k} = 0$ $(i = k+1, \dots, n)$ и что форма ω_0 слабо замкнута. Более детально:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma(a,R)} (\omega - \omega_0) &= \int\limits_{\Sigma(a,R)} \omega = \\
&= \int\limits_{\Sigma(a,R)} \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i-k-1} f_i \, df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n = \\
&= \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i-k-1} \displaystyle\int\limits_{\Sigma(a,R)} f_i \, df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n = \\
&= \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \displaystyle\int\limits_{B(a,R)} df_1 \wedge \dots \wedge df_i \wedge \dots \wedge df_n = \\
&= (n-k) \int\limits_{B(a,R)} J(x,f) \, d\mathcal{H}^n \, .
\end{aligned}$$

Соотношение

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)} f_i \, df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n = (-1)^{i-k-1} \int\limits_{B(a,R)} df_1 \wedge \dots \wedge df_n \tag{3.5.2}$$

очевидно в случае C^2-гладких отображений. В общем случае, аппроксимируем гомеоморфизм $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ гладкими отображениями со свойствами:

i) $f_s \to f$ локально равномерно в $\mathcal{X}$ при $s \to \infty$;

ii) $|f'_s(x) - f'(x)|_{L^n(D)} \to 0$ при $s \to \infty$ для всякой подобласти $D \subset\subset \mathcal{X}$.

Нетрудно видеть, что такая аппроксимация возможна, для чего достаточно воспользоваться стандартной техникой (см., например, [86, Теорема 3.1.2]). Тогда фиксируем произвольно r_1, r_2 так, чтобы $0 < r_1 < R < r_2 < R_a$. По формуле Остроградского – Гаусса (3.4.9) для гладких функций f_s имеем

$$(-1)^{i-k-1}\int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{B(a,r)} J(x,f_s)\,d\mathcal{H}^n = \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\Sigma(a,R)} f_{si}\,df_{s1}\wedge\ldots\wedge\widehat{df_{si}}\wedge\ldots\wedge df_{sn}\,.$$

Так как $f_s \to f$ равномерно на $B_{\mathcal{X}}(a,r)$ и $f_k|_{\Pi^k}=0$, переходя к пределу при $s\to\infty$ получаем

$$(-1)^{i-k-1}\int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{B(a,r)} J(x,f)\,d\mathcal{H}^n = \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\Sigma(a,R)} f_i\,df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n\,.$$

Разделим обе части данного соотношения на r_2-r_1. Полагая $r_2\to r_1$, убеждаемся в справедливости (3.5.2) для почти всех $R>0$.

Тем самым, равенство (3.5.1) полностью обосновано.

Таким образом, мы находим

$$\varepsilon_K(a,R)\le \int\limits_{\Sigma(a,R)} J(x,f) * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \Big/ V(a,R)\,.$$

Замечая, что $|\nabla d(a,x)|\equiv 1$, приходим к соотношению

$$V'(a,R)=\int\limits_{\Sigma(a,R)} J(x,f) * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \ge \varepsilon_K(a,R)\,V(a,R)\,,$$

справедливому для почти всех $R\in[0,R_a)$.

Решая данное дифференциальное неравенство, получаем

$$\exp\left\{\int\limits_r^R \varepsilon_K(a,\tau)\,d\tau\right\}\le\frac{V(a,R)}{V(a,r)} \tag{3.5.3}$$

где $0<r<R<R_a$ произвольны.

Так как

$$V(a,r)\ge\Omega_n\,l^n(a,r)$$

и

$$V(a,R)\le\Omega_n L^n(a,R)\,,$$

то

$$\frac{V(a,R)}{V(a,r)} \le \frac{L^n(a,R)}{l^n(a,r)}\,.$$

В силу (3.4.19), теперь имеем

$$\frac{V(a,R)}{V(a,r)} \le D^n(a,r)\,D^n(a,R)\,\frac{l^n(a,R)}{L^n(a,r)}\,,$$

и далее, согласно (3.4.20),

$$\frac{V(a,R)}{V(a,r)} \le K^{1/(n-1)}\,D^n(a,r)\,D^n(a,R)\,\ \ln\frac{R}{r}\,.$$

Оценка (3.5.3) влечет справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.5.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — n−мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Если Π^k — K-квазиплоскость в $\mathcal{X}$ размерности $1 \le k < n-1$, то для всякой точки $a \in \Pi^k$ и произвольной пары чисел r, R, $0 < r < R < R_a$, выполняются соотношения*

$$\exp\left\{\int\limits_r^R \varepsilon_K(a,\tau)\,d\tau\right\} \le K^{1/(n-1)}\,D^n(a,r)\,D^n(a,R)\,\ \ln\frac{R}{r}\,. \tag{3.5.4}$$

В случае квазиплоских поверхностей в $\mathbb{R}^n$ соответствующие результаты см. в [204].

Оценим величину $\varepsilon_K(a,R)$ через более привычные величины. Зафиксируем K-квазиконформное отображение $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, $f(\Pi^k) = \Pi_0^k$.

Мы будем оценивать характеристику $\varepsilon_f(a,R)$ с использованием величины

$$\eta(\Sigma(a,R)) = \sup_A \inf_\varphi \frac{\left(\int_{\Sigma(a,R)} |\nabla_S\varphi|^n d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n}}{\left(\int\limits_{\Sigma(a,R)} |\varphi - A|^n d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n}}\,,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям

$$\varphi \in W_n^1(\Sigma(a,R)), \quad \varphi|_{\partial\Sigma(a,R)} = 0\,,$$

точная верхняя — по всевозможным постоянным A и $\partial\Sigma(a,R)$ есть граница $\Sigma(a,R)$ относительно $S_{\mathcal{X}}(a,R)$.

Величина $\nabla_S\varphi$, как обычно, означает градиент φ в метрике поверхности $S(a,r)$.

Выбирая

$$\omega_0 = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i-k-1}\alpha_i\, df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n\,,$$

где α_i суть произвольные постоянные, мы имеем

$$\varepsilon_f(a,R) \geq \frac{\displaystyle\int\limits_{\Sigma(a,R)} *d\omega}{\displaystyle\int\limits_{\Sigma(a,R)} |\omega - \omega_0|\, d\mathcal{H}^{n-1}}\,. \tag{3.5.5}$$

Введем обозначение

$$\xi = \sum_{i=k+1}^{n} \left| df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n \right|^2.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)} |\omega-\omega_0|\, d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le \int\limits_{\Sigma(a,R)} \sqrt{\sum\limits_{i=k+1}^{n}(f_i-\alpha_i)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=k+1}^{n}\left|df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n\right|^2} d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\Sigma(a,R)} \left(\sum\limits_{i=k+1}^{n}(f_i-\alpha_i)^2\right)^{n/2} d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Sigma(a,R)} \xi^{n/(2(n-1))}\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{(n-1)/n} .$$

Нетрудно проверяется соотношение

$$\xi^{n/(2(n-1))} \le c_1(n,k)\, |f'(x)|^n \,, \tag{3.5.6}$$

где $c_1(n,k)$ – постоянная, причем можно положить

$$c_1(n,k) = (n-k)^{n/(2(n-1))} \,. \tag{3.5.7}$$

Действительно, так как форма $df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n$ is является простой, то

$$|df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n|^2 =$$

$$= \langle df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n,\, df_1\wedge\ldots\wedge\widehat{df_i}\wedge\ldots\wedge df_n\rangle \le$$

$$\le \prod\limits_{\substack{s=1\\ s\ne i}}^{n} |df_s|^2 \,.$$

Неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим ведет к соотношению

$$\left(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} |df_s|^2\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} |df_s|^2$$

и потому

$$|df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n|^{2/(n-1)} \leq \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} |df_s|^2 \,. \tag{3.5.8}$$

Для произвольного вектора $h \in T_x(\mathcal{X})$:

$$|f'(x)h|^2 = \sum_{s=1}^{n} \langle \nabla f_s, h\rangle^2 \,,$$

и полагая $h = \nabla f_i / |\nabla f_i|$, приходим к оценке

$$|\nabla f_i|^2 + \frac{1}{|\nabla f_i|^2}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} \langle \nabla f_s, \nabla f_i\rangle^2 \leq |f'|^2 \,. \tag{3.5.9}$$

Таким образом, соотношение (3.5.8) влечет

$$|df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n| \leq |f'(x)|^{n-1}$$

и неравенство (3.5.6) действительно имеет место.

Пользуясь (3.5.6), получаем

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)} \xi^{n/(2(n-1))} d\mathcal{H}^{n-1} \leq c_1(n,k) \int\limits_{\Sigma(a,R)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1} \,.$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{t_1}\right)^{1/t_1} \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{t_2}\right)^{1/t_2} \qquad (t_1 \leq t_2)$$

(см., например, [12, §16 главы I]).

Мы имеем

$$\left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i-\alpha_i|^2\right)^{1/2} \le \left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i-\alpha_i|^n\right)^{1/n}$$

и потому

$$\left(\sum_{i=k+1}^{n}|f_i-\alpha_i|^2\right)^{1/2} \le c_2(n,k)\left(\sum_{i=k+1}^{n}|f_i-\alpha_i|^n\right)^{1/n}$$

с постоянной $c_2(n,k)=(n-k)^{(n-2)/(2n)}$.

По определению величины $\eta(\Sigma(a,R))$ можем записать, что

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)}\left(\sum_{i=k+1}^{n}(f_i-\alpha_i)^2\right)^{n/2} d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le c_2^n(n,k)\sum_{i=k+1}^{n}\int\limits_{\Sigma(a,R)}|f_i-\alpha_i|^n\,d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le c_2^n(n,k)\eta^{-n}(\Sigma(a,R))\sum_{i=k+1}^{n}\int\limits_{\Sigma(a,R)}|\nabla_S f_i|^n\;d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

Оценка (3.5.9) влечет, что $|\nabla_S f_i|\le|f'|$ при $i=1,\ldots,n$, а потому

$$\sum_{i=k+1}^{n}|\nabla_S f_i|^n \le (n-k)\,|f'|^n\,.$$

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Sigma(a,R)}\left(\sum_{i=k+1}^{n}(f_i-\alpha_i)^2\right)^{n/2} d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\leq c_3(n,k)\,\eta^{-n}(\Sigma(a,R)) \int\limits_{\Sigma(a,R)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\,.$$

в котором

$$c_3(n,k) = (n-k)\,c_2(n,k) = (n-k)^{n/2}\,.$$

Подставляя найденную оценку в (3.5.5), находим

$$\varepsilon_K(a,R) \geq$$

$$\geq (n-k)^{-1}\,\eta(\Sigma(a,R)) \int\limits_{\Sigma(a,R)} J(x,f)\,d\mathcal{H}^{n-1} \Bigg/ \int\limits_{\Sigma(a,R)} |f'(x)|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}\ .$$

Тем самым, получаем

$$\varepsilon_K(a,R) \geq \frac{1}{K_O(f)}\,\eta(\Sigma(a,R)) \tag{3.5.10}$$

и на основании теоремы 3.5.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.5.2 *Пусть $\mathcal{X}$ — $n-$мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3-многообразие без края. Если Π^k — K-квазиплоскость в $\mathcal{X}$ размерности $1 \leq k < n-1$, то для всякой точки $a \in \Pi^k$ и произвольной пары чисел r, R, $0 < r < R < R_a$, выполняются соотношения*

$$\exp\left\{\frac{1}{K_O(f)} \int\limits_r^R \eta(\Sigma(a,\tau))\,d\tau\right\} \leq K^{1/(n-1)}\,D^n(a,r)\,D^n(a,R)\ \ln\frac{R}{r}\,.$$

Задача 3.5.11 Представляет интерес распространение изложенных в главе результатов на случай многообразий с билипшицевой или квазиконформной структурой. Буквальное следование использованной в главе схеме весьма громоздко, и необходима предварительная разработка надлежащей техники.

Глава 4

Уравнения и системы

В этой главе мы приведем оценки для величин $\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B)$, $E(\tau; N)$, введенных выше, в терминах основной частоты грубо закрепленной и свободной мембран. Пользуясь этими оценками, мы получаем теоремы типа Фрагмена – Линделефа для решений и субрешений (с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана) квазилинейных уравнений эллиптического типа на многообразии.

Мы приводим также оценки основной частоты в терминах изопериметрической функции мембраны.

4.1 Принцип Фрагмена – Линделефа

Ниже доказываются теоремы типа Фрагмена – Линделефа для решений и субрешений.

4.1.1 "Весовые" характеристики закрепленной мембраны

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие с непустым кусочно-гладким краем $\partial\mathcal{M}$. Зафиксируем произвольно функцию исчерпания

$$h(m) : \mathcal{M} \to (0, \infty)\,.$$

Рассмотрим класс непрерывных функций (0-форм) $f(m) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, являющихся обобщенными решениями (2.2.19) уравнения (2.2.18) с ограничениями (2.2.15), (2.2.16).

В силу теоремы 2.2.3 заключаем, что 1-форма df принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{M}$. Предположим, что выполнено следующее граничное условие

$$f\,|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \tag{4.1.1}$$

Мы находимся в условиях теоремы 2.3.3, где $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_0$ есть описанный выше класс 0-форм с граничным условием (2.3.2). Оценим величину $\varepsilon(t; \mathcal{F}_B)$, определяемую соотношением (2.3.21).

В соответствии с (2.3.14), форма, дополнительная к 1-форме $df = w$, может быть записана в локальных координатах в точке $m \in \partial\mathcal{M}$ в виде

$$\theta = * \sum_{i=1}^{n} A_i(m, \nabla f(m))\, dx^i.$$

В рассматриваемом случае функционал (2.3.21) может быть выражен в виде

$$\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B) = \inf \frac{\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{\Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\,\theta \Big|} \tag{4.1.2}$$

где точная нижняя грань берется по всем решениям $f(m)$ уравнения (2.2.18), подчиненным граничному условию (4.1.1).

Оценим знаменатель в (4.1.2). Имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\,\theta \;=\; \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f(m) \langle A(m, \nabla f(m)), n \rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \tag{4.1.3}$$

где n есть единичный вектор внутренней нормали к $\partial\mathcal{M}$ в точке m.

Пусть $m \in \Sigma_h(\tau)$ – регулярная точка h-сферы. Обозначим через

$$\nabla_1 f(m) \quad \text{и} \quad \nabla_2 f(m)$$

проекции вектора ∇f на направление вектора n и гиперплоскость, ортогональную n, соответственно. Ограничения (2.2.15) и (2.2.16) на уравнение (2.2.18) влекут неравенство

$$|\langle A(m, \nabla f), n \rangle| \le \nu_1 |\nabla_1 f| |\nabla f|^{p-2} + \nu |\nabla f|^{p-1}\,, \tag{4.1.4}$$

где $\nu = \sqrt{\nu_2 - \nu_1}$.

Чтобы проверить неравенство (4.1.4) запишем

$$\begin{aligned}|\langle A, n\rangle| &\le |\langle A - \nu_1 |\nabla f|^{p-2}\nabla f, n\rangle + \nu_1\langle|\nabla f|^{p-2}\nabla f, n\rangle| \le \\ &\le |A - \nu_1|\nabla f|^{p-2}\nabla f| + \nu_1|\nabla f|^{p-2}|\nabla_1 f|.\end{aligned}$$

Пользуясь предположениями (2.2.15) и (2.2.16), имеем

$$\begin{aligned}|A - \nu_1|\nabla f|^{p-2}\nabla f|^2 &= |A|^2 - 2\nu_1|\nabla f|^{p-2}\langle A, \nabla f\rangle + \nu_1^2|\nabla f|^{2p-2} \le \\ &\le (\nu_2^2 - \nu_1^2)|\nabla f|^{2p-2}.\end{aligned}$$

Последние два неравенства влекут (4.1.4).

Объединяя (4.1.3) и (4.1.4), получаем

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\,\theta\right| \le \nu_1 \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f||\nabla_1 f||\nabla f|^{p-2} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} + \\ +\nu \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f||\nabla f|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \equiv \nu_1 I_1 + \nu I_2\,.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Оценим каждый из интегралов I_1 и I_2 раздельно. Применяя неравенство Юнга

$$a\,b^{p-1} \le \frac{\varepsilon^p}{p}\,a^p + \frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{p/(1-p)}\,b^p, \quad a,\, b,\, \varepsilon > 0,\, p > 1.$$

получаем

$$|f||\nabla f|^{p-1} \le \frac{p-1}{p}\varepsilon^{p/(1-p)}|\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p + \frac{\varepsilon^p}{p}|\nabla h|^{p-1}|f|^p.$$

Таким образом,

$$I_2 \le \frac{p-1}{p}\varepsilon^{p/(1-p)} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} + \tag{4.1.6}$$

$$+\frac{\varepsilon^p}{p}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{p-1}|f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Пусть $U\subset\Sigma_h(\tau)$ – открытое множество. Нам потребуется величина

$$\lambda_p(U)=\inf\frac{\left(\int\limits_U|\nabla h|^{-1}|\nabla_2\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_U|\nabla h|^{p-1}|\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p}} \tag{4.1.7}$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\phi\in W^1_p(U)$ с носителем $\operatorname{supp}\phi\subset U$. Здесь $\nabla_2\phi$ есть градиент ϕ на многообразии $\Sigma_h(\tau)$. В случае $|\nabla h|\equiv 1$ эта величина совпадает с основной частотой (см. раздел 3.3.2).

Если $\phi=f\,|_{\Sigma_h(\tau)}$, то, ввиду (4.1.1), справедливо включение $\operatorname{supp}\phi\subset\Sigma_h(\tau)$. Пользуясь характеристикой (4.1.7), имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{p-1}|f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\le\lambda_p^{-p}(\Sigma_h(\tau))\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p\,d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Таким образом, неравенство (4.1.6) принимает вид

$$I_2\le\frac{p-1}{p}\varepsilon^{p/(1-p)}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^p}{p}\lambda_p^{-p}(\Sigma_h(\tau))\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Если теперь положить $\varepsilon^p=\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{p-1}$, то мы получаем

$$I_2\le\frac{p-1}{p}\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}+ \tag{4.1.8}$$

$$+\frac{1}{p}\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,.$$

Вернемся к оценке интеграла I_1 в (4.1.5). Рассмотрим сначала случай $p\le 2$. Пользуясь (4.1.7), имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|f||\nabla_1 f|^{p-1}d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\le\\
&\le\left(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{p-1}|f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p}\left(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_1 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{(p-1)/p}\le\\
&\le\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1}\left(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{1/p}\times\\
&\times\left(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_1 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\right)^{(p-1)/p}\le\\
&\le\frac{\delta^p}{p}\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}+\\
&+\frac{p-1}{p}\delta^{p/(1-p)}\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)}|\nabla h|^{-1}|\nabla_1 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,,
\end{aligned}$$

где $\delta>0$ произвольно.

Выберем δ так, чтобы коэффициенты перед двумя последними интегралами были равны. Положим

$$\delta=(p-1)^{(p-1)/p^2}\,.$$

Тогда

$$I_1 \le \lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1} p^{-1} (p-1)^{(p-1)/p} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} (|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Объединяя это неравенство с неравенствами (4.1.5) и (4.1.8), получаем

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau)) \Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\theta \Big| \le \nu \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} +$$

$$+ \frac{\nu_1}{p} (p-1)^{(p-1)/p} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} (|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p)\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

На основании неравенства

$$\Big(\frac{a^p + b^p}{2}\Big)^{1/p} \le \Big(\frac{a^2 + b^2}{2}\Big)^{1/2}$$

справедливого при $p \le 2$, мы будем иметь при $p \le 2$

$$|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p \le 2^{1-\frac{p}{2}} |\nabla f|^p.$$

Таким образом, из предыдущих соотношений для произвольного $p \le 2$ будем иметь

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau)) \Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\theta \Big| \le c_1 \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \tag{4.1.9}$$

где

$$c_1 = \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2} + 2^{1-\frac{p}{2}} \nu_1 p^{-1} (p-1)^{(p-1)/p}\,. \tag{4.1.10}$$

Пусть теперь $p > 2$. Мы будем пользоваться неравенством

$$abc \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} + \frac{c^r}{r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1\,,$$

справедливым при любых $a, b, c \ge 0$ и $p, q, r \ge 1$.

В силу (4.1.7), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f||\nabla_1 f||\nabla f|^{p-2} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \leq \\ &\leq \frac{1}{p}\lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{p-1} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{p-1}|f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} + \\ &+ \frac{1}{p\lambda_p(\Sigma_p(\tau))} \int\limits_{\Sigma_p(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_1 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} + \\ &+ \frac{p-2}{p\lambda_p(\Sigma_h(\tau))} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{p\lambda_p(\Sigma_h(\tau))} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}(|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} + \\ &+ \frac{p-2}{p\lambda_p(\Sigma_h(\tau))} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{p-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством

$$(a^p + b^p)^{1/p} \leq (a^2 + b^2)^{1/2}\,,$$

справедливым при $p \geq 2$ и $a, b \geq 0$. Тем самым, находим

$$|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p \leq |\nabla f|^p.$$

Отсюда, на основании предыдущего соотношения имеем

$$I_1 \leq \frac{p-1}{p\lambda_p(\Sigma_h(\tau))} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Применяя (4.1.5) и (4.1.8), при $p > 2$ находим

$$\Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} f\,\theta \Big| \le c_2 \lambda_p(\Sigma_h(\tau))^{-1} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \tag{4.1.11}$$

где

$$c_2 = \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2} + \nu_1 \frac{p-1}{p}. \tag{4.1.12}$$

Объединяя соотношения (4.1.2), (4.1.9) и (4.1.11), приходим к теореме.

Теорема 4.1.1 *В указанных предположениях для всякого* $\tau \in (0, h_0)$ *имеем*

$$\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B) \ge \lambda_p(\Sigma_h(\tau))/c, \tag{4.1.13}$$

где λ_p *есть основная частота жестко закрепленной мембраны* $\Sigma_h(\tau)$, *определяемая по формуле* (4.1.7), *с постоянной*

$$c = c(\nu_1, \nu_2, p) = \begin{cases} c_1 & p \le 2 \\ c_2 & p \ge 2 \end{cases}$$

и постоянными c_1, c_2, *задаваемыми соотношениями* (4.1.10) *и* (4.1.12).

Используем найденные оценки для доказательства теорем типа Фрагмена – Линделефа для решений квазилинейных уравнений на многообразиях.

Теорема 4.1.2 *Предположим, что многообразие* $\mathcal{M}$ *подчинено условию*

$$\int^{\infty} \lambda_p(\Sigma_h(t)) dt = \infty. \tag{4.1.14}$$

Пусть $f(m)$ *– непрерывное решение уравнения* (2.2.18) с (2.2.15), (2.2.16) *на* $\mathcal{M}$ *такое, что*

$$\limsup_{m \to m_0} f(m) \le 0, \quad \text{\textit{при всех} } m_0 \in \partial\mathcal{M}. \tag{4.1.15}$$

Тогда либо $f(m) \le 0$ *всюду на* $\mathcal{M}$, *либо*

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h||f(m)||\nabla f(m)|^{p-1} * \mathbb{1} \exp\Big\{-c_3 \int\limits^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0, \tag{4.1.16}$$

и

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|^p|f(m)|^p * \mathbb{1} \exp\Big\{-c_3 \int\limits^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0. \tag{4.1.17}$$

В частности, если $h(m)$ *есть специальная функция исчерпания на* $\mathcal{M}$, *то*

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1) \exp\Big\{-\frac{c_3}{p} \int\limits^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(\tau))dt\Big\} > 0. \tag{4.1.18}$$

Здесь

$$M(t) = \sup_{m\in\Sigma_h(t)} |f(m)|$$

и $c_3 = c^{-1}\nu_1^{-1}\nu_2^{p/(p-1)}$, *где* c *– постоянная из теоремы* 4.1.1.

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке $m_1 \in \operatorname{int}\mathcal{M}$ выполнено $f(m_1) > 0$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{O} = \{m \in \mathcal{M} : f(m) > f(m_1)\}.$$

В соответствии с принципом максимума из следствия 2.3.1 множество $\mathcal{O}$ не компактно.

Функция $h(m)$ является функцией исчерпания на $\mathcal{O}$. Пользуясь соотношением (2.3.32) для функции $f(m) - f(m_1)$ на $\mathcal{O}$, имеем

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\mathcal{O}(\tau)} |\nabla h||f(m)-f(m_1)||A(m,\nabla f)| * \mathbb{1}\times$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{\nu_1} \int\limits^{\tau} \varepsilon(t;\mathcal{F}_{\mathcal{O}})dt\Big\} > 0,$$

где $\mathcal{O}(\tau) = \{m \in \mathcal{O} : \tau < h(m) < \tau + 1\}$.

По теореме 4.1.1 справедливо неравенство

$$\varepsilon(t; \mathcal{F}_{\mathcal{O}}) \geq \lambda_p(\Sigma_h(t) \cap \mathcal{O})/c.$$

Так как $\Sigma_h(t) \cap \mathcal{O} \subset \Sigma_h(t)$, то $\lambda_p(\Sigma_h(t) \cap \mathcal{O}) \geq \lambda_p(\Sigma_h(t))$ и, следовательно,

$$\varepsilon(t; \mathcal{F}_{\mathcal{O}}) \geq \lambda_p(\Sigma_h(t))/c,$$

и, таким образом, на основании (2.2.16) для уравнения (2.2.18), приходим к оценке

$$\liminf_{\tau \to \infty} \int\limits_{\mathcal{O}(\tau)} |\nabla h||f(m) - f(m_1)||\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1} \exp\Big\{-c_3 \int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0.$$

Далее заметим, что условие $f(m) > f(m_1) > 0$ на $\mathcal{O}$ влечет

$$\int\limits_{\mathcal{O}(\tau)} |\nabla h|\, |f(m) - f(m_1)||\nabla f(m)|^{p-1} * \mathbb{1} =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{O}(\tau)} f(m)\, |\nabla h|\, |\nabla f(m)|^{p-1} * \mathbb{1} - f(m_1) \int\limits_{\mathcal{O}(\tau)} |\nabla h|\, |\nabla f(m)|^{p-1} * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h|\, |f(m)||\nabla f(m)|^{p-1} * \mathbb{1}.$$

Это соотношение гарантирует справедливость (4.1.16).

Доказательство (4.1.17) проводится в точности тем же самым приемом, базирующимся на неравенстве (2.3.33).

Чтобы проверить справедливость (4.1.18), заметим, что в соответствии с принципом максимума имеем

$$\int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h(m)|^p |f(m)|^p * \mathbb{1} \leq M^p(\tau + 1) \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h(m)|^p * \mathbb{1}.$$

Но $h(m)$ есть специальная функция исчерпания и, таким образом, на основании (1.1.20), (1.1.21) и (1.1.22) можем записать

$$\int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h(m)|^p * \mathbb{1} = J,$$

где J – величина, не зависящая от τ.

Соотношение (4.1.17) влечет тогда, что имеет место (4.1.18). $\Box$

4.1.2 Частные случаи

Пусть $\mathcal{A}$ – компактное риманово многообразие с непустым кусочно-гладким краем, $\dim \mathcal{A} = k \geq 1$, и пусть $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Выбирая в качестве специальной функции исчерпания $\mathcal{M}$ функцию $h(a,x)$, определенную как в примере 1.1.10, находим

$$\Sigma_h(t) = \mathcal{A} \times S^{n-1}(t).$$

Используя тот факт, что $h(a,x)|_{\Sigma_h(t)} = t$, будем иметь

$$|\nabla h(a,x)|_{\Sigma_h(t)} = h'(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } p = n \\ \dfrac{p-n}{p-1} t^{(1-n)/(p-n)} & \text{при } p \neq n\,. \end{cases}$$

Таким образом, на основании (4.1.7) получаем

$$\lambda_p(\Sigma_h(t)) = \frac{1}{h'(t)} \inf \frac{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}\times S^{n-1}(t)} |\nabla_2 \phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}\times S^{n-1}(t)} |\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}}\,.$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\nabla_2 \phi(a,x)|^2 &= |\nabla_{\mathcal{A}} \phi(a,x)|^2 + |\nabla_{S^{n-1}(t)} \phi(a,x)|^2 = \\ &= |\nabla_{\mathcal{A}} \phi(a,x)|^2 + \tfrac{1}{t^2} \Big|\nabla_{S^{n-1}(1)}\, \phi\Big(a, \tfrac{x}{|x|}\Big)\Big|^2 \end{aligned}$$

и

$$d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = d\sigma_{\mathcal{A}}\, dS^{n-1}(t),$$

где $d\sigma_{\mathcal{A}}$ – элемент k-мерной площади на $\mathcal{A}$.

Следовательно,

$$h'(t)\lambda_p(\Sigma_h(t)) =$$

$$= \inf \frac{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(t)} (|\nabla_{\mathcal{A}}\phi(x)|^2 + |\nabla_{S^{n-1}(t)}\phi(x)|^2)^{p/2} dS^{n-1}(t)\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(t)} \phi^p(x) dS^{n-1}(t)\Big)^{1/p}} =$$

$$= \inf \frac{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} (|\nabla_{\mathcal{A}}\,\phi(\frac{x}{|x|})|^2 + \frac{1}{t^2}|\nabla_{S^{n-1}(t)}\phi(\frac{x}{|x|})|^2)^{p/2} dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} \phi^p(\frac{x}{|x|})\, dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}$$

где $\phi(u) = \phi(a, u)$.

Тем самым, приходим к соотношению

$$\lambda_p(\Sigma_h(t)) = \tag{4.1.19}$$

$$= \frac{1}{h'(t)} \inf \frac{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} (|\nabla_{\mathcal{A}}\psi|^2 + \frac{1}{t^2}|\nabla_{S^{n-1}(1)}\psi|^2)^{p/2} dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} \psi^p\, dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям $\psi(a, x)$, для которых

$$\psi(a,x) \in W^{1,p}(\mathcal{A} \times S^{n-1}(1)), \quad \psi(a,x)|_{a\in\partial\mathcal{A}} = 0, \quad \text{при всех } x \in S^{n-1}(1).$$

В частном случае $n = 1$ теорема 4.1.2 имеет простое содержание. Здесь $h(x)$ есть функция одного переменного, $\Sigma_h(t) = \mathcal{A} \times S^0(t)$ изометрично $\Sigma_h(1)$. Таким образом, $h'(t) \equiv 1$ и согласно (4.1.19) мы имеем

$$\lambda_p(\Sigma_h(t)) \equiv \lambda_p(\Sigma_h(1)) \equiv \lambda_p(\mathcal{A}) \quad \text{при всех } \ t \in \mathbb{R}^1. \tag{4.1.20}$$

Тем же самым способом выражение (4.1.18) может быть записано в виде

$$\liminf_{t\to\infty} \max_{|x|=t} |f(a,x)| \, \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\,\lambda_n(\mathcal{A})\Big\} > 0. \tag{4.1.21}$$

Пусть $n \geq 2$. Мы не знаем примеров, где величина (4.1.19) точно вычислена. Некоторые идеи относительно скорости роста величины $M(\tau)$ в альтернативе Фрагмена – Линделефа вытекают из следующих аргументов. Упростим числитель в (4.1.19), отбрасывая второе слагаемое. Тогда

$$\lambda_p(\Sigma_h(t)) \geq \frac{1}{h'(t)} \inf_{\psi} \frac{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} |\nabla_{\mathcal{A}}\psi(a,x)|^p \, dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} d\sigma_{\mathcal{A}} \int\limits_{S^{n-1}(1)} \psi^p(a,x) \, dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}.$$

При каждом фиксированном $x \in S^{n-1}(1)$ функция $\psi(a,x)$ финитна в $\mathcal{A}$, поскольку из определения основной частоты следует, что

$$\Big(\int\limits_{\mathcal{A}} |\nabla_{\mathcal{A}}\psi(a,x)|^p \, d\sigma_{\mathcal{A}}\Big)^{1/p} \geq \lambda_p(\mathcal{A}) \Big(\int\limits_{\mathcal{A}} \psi^p(a,x) \, d\sigma_{\mathcal{A}}\Big)^{1/p}.$$

Отсюда,

$$\lambda_p(\Sigma_h(t)) \geq \frac{1}{h'(t)} \lambda_p(\mathcal{A}). \tag{4.1.22}$$

Тем самым, находим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(r))\,dr \ &\geq \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_p(\mathcal{A})\frac{dr}{h'(r)} = \\ &= \lambda_p(\mathcal{A})\int\limits_{\tau_0}^{\tau} r'(h)\,dh = \\ &= \lambda_p(\mathcal{A})(r(\tau)-r(\tau_0)).\end{aligned}$$

Здесь $r(h)$ есть функция, обратная к $h(r)$.

Поскольку

$$\max_{h(|x|)=\tau} |f(a,x)| \ \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\lambda_p(\mathcal{A})\,r(\tau)\Big\} =$$
$$= \max_{|x|=r(\tau)} |f(a,x)| \ \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\lambda_p(\mathcal{A})\,r(\tau)\Big\},$$

то соотношение (4.1.18) может быть записано в виде (4.1.21).

Пусть $U \subset S^{n-1}$ – произвольная область с непустой границей. Рассмотрим искривленное произведение $\mathcal{M} = (r_1, r_2) \times U$, снабженное метрикой (1.1.25), задаваемой в области D. Сделаем анализ теоремы 4.1.2 в этом случае.

Функция $h(r)$, задаваемая уравнением (1.1.27) с условием (1.1.26), является специальной функцией исчерпания на $\mathcal{M}$. Вычислим величину $\lambda_p(\Sigma_h(\tau))$ следующим образом

$$|\nabla_2 h(|x|)|_{\Sigma_h(\tau)} = h'(r(\tau)) = \alpha(r(\tau))/\beta^{\frac{n-1}{p-1}}(r(\tau)),$$

$$|\nabla_2 \phi|_{\Sigma_h(\tau)} = |\nabla_{S^{n-1}(1)}\phi|/\beta(r(\tau))$$

и

$$d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \beta^{n-1}(r(\tau))dS^{n-1}(1), \quad r(\tau) = h^{-1}(\tau).$$

Тем самым, замечая, что

$$\frac{1}{h'(r(\tau))} = r'(\tau),$$

имеем

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau)) = \frac{1}{h'(r(\tau))} \inf_{\phi} \frac{\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla_2 \phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \phi^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}})^{1/p}} =$$

$$= \frac{r'(\tau)}{\beta(r(\tau))} \inf \frac{\Big(\int\limits_U |\nabla_{S^{n-1}(1)} \phi|^p dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_U \phi^p dS^{n-1}(1)\Big)^{1/p}}.$$

Отсюда находим

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau)) = \frac{r'(\tau)}{\beta(r(\tau))}\, \lambda_p(U). \tag{4.1.23}$$

Далее,

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_h(\Sigma_h(\tau))\, d\tau = \lambda_p(U) \int\limits_{r(\tau_0)}^{r(\tau)} \frac{dr}{\beta(r)}$$

и

$$\max_{h(|x|)=\tau} |f(x)| \, \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\lambda_p(U) \int\limits_{r(\tau_0)}^{r(\tau)} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\} =$$

$$= \max_{|x|=r(\tau)} |f(x)| \, \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\lambda_p(U) \int\limits_{r(\tau_0)}^{r(\tau)} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\}.$$

Таким образом, соотношение (4.1.18) приобретает вид

$$\liminf_{r\to\infty} \max_{|x|=r} |f(x)| \, \exp\Big\{-\frac{c_3}{p}\lambda_p(U) \int\limits_{r(\tau_0)}^{r} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\} > 0. \tag{4.1.24}$$

В соответствии с теоремой 4.1.1 имеем следующий результат.

Теорема 4.1.3 *В описанных предположениях неравенство*

$$E(\tau; N) \geq \lambda_p(\Sigma_h(\tau); N)/c$$

справедливо с постоянной c из теоремы 4.1.1 *при любом* $\tau \in (0, h_0)$.

Далее приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.1.4 *Пусть* $\mathcal{M}$ *–* n*-мерное связное некомпактное риманово многообразие без края. Предположим, что для некоторого* $N = 2, 3, \ldots$, *выполнено неравенство*

$$\int^{\infty} \lambda_p(\Sigma_h(t); N)dt = \infty\,. \tag{4.1.25}$$

Предположим также, что имеется L *областей* $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_L$ *на* $\mathcal{M}$, *обладающих свойствами:* $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, L$, *и в каждой из областей* $\mathcal{O}_i$ *задано непрерывное решение* $f_i(x)$, $f_i(x)\,|\,\partial\mathcal{O}_i = 0$, $i = 1, \ldots, L$, *уравнения вида* (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) *со структурными постоянными* p, ν_1, ν_2.

Пусть $f(x)$ *– функция, совпадающая с* $f_i(x)$ *на* $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \ldots, L$, *и равная* 0 *всюду на* $\mathcal{M} \setminus \bigcup_i \mathcal{O}_i$. *Предположим, что* $f(x)$ *подчинена условию*

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{B_h(\tau)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}\ \exp\Big\{-C\int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t); N)dt\Big\} = 0, \tag{4.1.26}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|\,|f|\,|\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1}\ \exp\Big\{-C\int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t); N)dt\Big\} = 0, \tag{4.1.27}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|^p\,|f|^p * \mathbb{1}\ \exp\Big\{-C\int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t); N)dt\Big\} = 0 \tag{4.1.28}$$

или, если $h = h(m)$ есть специальная функция исчерпания

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\,\exp\Big\{-\frac{C}{p}\int^{\tau}\lambda_p(\Sigma_h(t);N)dt\Big\} = 0, \tag{4.1.29}$$

где $C = \nu_2^{p/(p-1)}/c\nu_1$, постоянная c как в теореме 4.1.1 и

$$M(t) = \sup_{\Sigma_h(t)} |f(m)|.$$

Тогда $L < N$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.3.7 и оценки N-средних основной частоты, устанавливаемой теоремой 4.1.3. □

4.1.3 Иллюстрирующие примеры

Пусть $\mathcal{A}$ – k-мерное, $k \geq 1$, компактное риманово многообразие без края, пусть $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, – многообразие и $h(a,x) = h(|x|)$ – специальная функция исчерпания на $\mathcal{M}$, описанная в примере 1.1.8. Если $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_L$ суть взаимно неналегающие неограниченные подобласти в $\mathcal{M}$ как в теореме 4.1.4, то существует постоянная $\tau_0 > 0$ такая, что при любых $\tau > \tau_0$ выполнено

$$\mathcal{O}_i(\tau) = \mathcal{O}_i \cap \Sigma_h(\tau) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Пусть $n = 1$. В соответствии с (2.3.35) и (4.1.22) для любого $\tau > \tau_0$ имеем

$$\lambda_p(\Sigma_h(r(\tau)); L) = \inf \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\lambda_p(\mathcal{O}_i(r(\tau))) \geq \lambda_p(\mathcal{A}; L). \tag{4.1.30}$$

Требование (4.1.25) удовлетворяется на $\mathcal{M}$ с очевидностью при $L \geq N$. Условие (4.1.29) может быть записано в виде

$$\liminf_{\tau\to\infty}\max_{|x|=\tau}|f(a,x)|\,\exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{p\,c\,\nu_1}\,\lambda_p(\mathcal{A};N)\,\tau\Big\} = 0. \tag{4.1.31}$$

Пусть $n \geq 2$. Пользуясь определением N-средних (2.3.35) и (4.1.22), находим

$$\lambda_p(\Sigma_h(r(\tau)); L) \geq \frac{1}{h'(r(\tau))} \inf \sum_{i=1}^{L} \lambda_p(\mathcal{O}_i(r(\tau))) \geq$$

$$\geq \frac{1}{h'(r(\tau))} \lambda_p(\mathcal{A}; L) \tag{4.1.32}$$

и, тем самым, приходим к (4.1.31).

Рассмотрим случай искривленного риманова произведения, описанного в примере 1.1.9. Предположим, что $U = S^{n-1}(1)$. Тогда

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^n : r_1 < r < r_2,\ \theta \in S^{n-1}(1)\}.$$

Многообразие $\mathcal{M} = (r_1, r_2) \times S^{n-1}(1)$ есть область D, оснащенная метрикой

$$ds^2_{\mathcal{M}} = \alpha^2(r)dr^2 + \beta^2(r)dl^2_\theta.$$

Пользуясь (2.3.35) и (4.1.22), имеем

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau); N) \geq \frac{1}{\beta(r(\tau))h'(r(\tau))} \lambda_p(S^{n-1}(1); N)$$

и условие (4.1.29) имеет вид

$$\liminf_{r\to\infty} M(r) \exp\Big\{-\frac{\nu_2^{p/(p-1)}}{c\,\nu_1}\lambda_p(S^{n-1}(1); N) \int^{r} \frac{d\tau}{\beta(\tau)}\Big\} = 0\,, \tag{4.1.33}$$

где

$$M(r) = \sup_{|x|=r} |f(x)|.$$

4.1.4 Теорема Лиувилля

Здесь мы докажем две теоремы типа теоремы Лиувилля. Пусть f – функция класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$. Предположим сначала, что векторное поле

$A = A(m, \nabla f(m))$ на $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям (2.2.15) и (2.2.16). Изучим обобщенные решения дифференциального неравенства

$$f \operatorname{div}_{\mathcal{M}} A(m, \nabla f(m)) \geq 0. \tag{4.1.34}$$

Будем называть $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$ *обобщенным решением* (4.1.34), если для любой неотрицательной функции $\varphi \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$, $1/p + 1/q = 1$, с компактным носителем выполняется

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \varphi \, \langle \nabla f, A(m, \nabla f(m)) \rangle * \mathbb{1} + \int\limits_{\mathcal{M}} f \, \langle \nabla \varphi, A(m, \nabla f(m)) \rangle * \mathbb{1} \leq 0\,. \tag{4.1.35}$$

Теорема 4.1.5 *Предположим, что $\mathcal{M}$ есть открытое многообразие p-параболического типа, $p > 1$. Если f – ограниченное обобщенное решение дифференциального неравенства* (4.1.34) *на $\mathcal{M}$, то $f \equiv \text{const}$.*

Доказательство. Пусть $Q \subset \mathcal{M}$ – компактное множество и пусть φ – произвольная неотрицательная липшицева функция с компактным носителем и такая, что $\varphi|_Q = 1$. Согласно (4.1.35) мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^p \, \langle \nabla f, A(m, \nabla f) \rangle * \mathbb{1} \leq - \int\limits_{\mathcal{M}} f \, \langle \nabla \varphi^p, A(m, \nabla f) \rangle * \mathbb{1}.$$

Используя (2.2.15) и (2.2.16), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \nu_1 \int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^p \, |\nabla f|^p * \mathbb{1} \; &\leq p \int\limits_{\mathcal{M}} |f| \, \varphi^{p-1} |\nabla \varphi| \, |A(m, \nabla f| * \mathbb{1} \leq \\ &\leq \nu_2 \, p \, C \int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^{p-1} |\nabla \varphi| \, |\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1}, \end{aligned}$$

где

$$C = \sup_{\mathcal{M}} |f(m)|.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^{p-1} |\nabla \varphi| \, |\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1} \leq \left(\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla \varphi|^p * \mathbb{1} \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^p |\nabla f|^p * \mathbb{1} \right)^{(p-1)/p},$$

то
$$\nu_1^p \int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^p \, |\nabla f|^p \, * \mathbb{1} \le (\nu_2 \, p \, C)^p \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla \varphi|^p \, * \mathbb{1}.$$
Однако, $\varphi(m) \equiv 1$ при $m \in Q$ и мы можем записать
$$\nu_1^p \int\limits_{Q} |\nabla f|^p \, * \mathbb{1} \le (\nu_2 \, p \, C)^p \int\limits_{\mathcal{M}\setminus Q} |\nabla \varphi|^p \, * \mathbb{1},$$
или, учитывая произвольность в выборе φ,
$$\nu_1^p \int\limits_{Q} |\nabla f|^p \, * \mathbb{1} \le (\nu_2 \, p \, C)^p \operatorname{cap}_p (Q, \mathcal{M}; \mathcal{M}) \, .$$
Так как $\mathcal{M}$ имеет p-параболический тип, то
$$|\nabla f| \equiv 0 \quad \text{почти всюду на} \quad Q.$$
Таким образом, $|\nabla f| \equiv 0$ почти всюду на $\mathcal{M}$ и, следовательно, $f \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{M}$. □

Сравнительно с вышеприведенной теоремой следующее утверждение предполагает более слабые ограничения на решение.

Теорема 4.1.6 *Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное связное некомпактное риманово многообразие без края, для которого*
$$\int^{\infty} \lambda_p(\Sigma_h(t); 2) dt = \infty. \tag{4.1.36}$$
Пусть f – решение (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16), *удовлетворяющее предположениям*
$$\liminf_{\tau \to \infty} \int\limits_{B_h(\tau)} |\nabla f|^p * \mathbb{1} \, \exp\Big\{ -C \int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t); 2) dt \Big\} = 0, \tag{4.1.37}$$
или
$$\liminf_{\tau \to \infty} \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h| \, |f| \, |\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1} \, \exp\Big\{ -C \int^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t); 2) dt \Big\} = 0, \tag{4.1.38}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|^p\,|f|^p * \mathbb{1}\ \exp\Big\{-C\int\limits^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t);2)dt\Big\} = 0 \quad (4.1.39)$$

или, если $h = h(m)$ есть специальная функция исчерпания,

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\ \exp\Big\{-\frac{C}{p}\int\limits^{\tau} \lambda_p(\Sigma_h(t);2)dt\Big\} = 0, \quad (4.1.40)$$

где $C = \nu_2^{p/(p-1)}/c\nu_1$, постоянная c, как в теореме 4.1.1, и

$$M(t) = \sup_{\Sigma_h(t)} |f(m)|.$$

Тогда $f \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{M}$.

Доказательство. Предположим, что $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда для всякой точки $m_0 \in \mathcal{M}$ найдутся две взаимно неналегающих компоненты $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ множеств

$$\{m \in \mathcal{M} : f(m) > f(m_0)\} \quad \text{и} \quad \{m \in \mathcal{M} : f(m) < f(m_0)\},$$

соответственно. Области $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ неограничены. Утверждение есть специальный случай теоремы 4.1.4 для $N = 2$. □

4.1.5 Свободная мембрана

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие с непустым кусочно-гладким краем и пусть $h(m) : \mathcal{M} \to (0,\infty)$ – функция исчерпания $\mathcal{M}$.

Рассмотрим класс $\mathcal{F}_B$ непрерывных решений $f(m) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ уравнения (2.2.18) с (2.2.15),(2.2.16) на $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию Неймана с нулевыми граничными данными (2.3.16).

Воспользуемся оценкой величины $\varepsilon(\tau;\mathcal{F}_B)$, определяемой равенством (2.3.21). Граничное условие (2.3.16) гарантирует, что для произвольной постоянной c функция $f - c$ также принадлежит классу $\mathcal{F}_B$. Таким образом, функционал (2.3.21) в данном случае может быть записан в виде

$$\varepsilon(\tau;\mathcal{F}_B) = \inf \frac{\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (f-c)\langle A(m,\nabla f), n\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big|}\,, \tag{4.1.41}$$

где точная нижняя грань берется по всем решениям $f(m)$ уравнения (2.2.18), удовлетворяющим условию (2.3.16).

Так как решения f удовлетворяют (2.3.16), знаменатель в (4.1.41) не зависит от постоянной c.

Оценим знаменатель в (4.1.41). Как и выше, приходим к неравенству (4.1.4), которое влечет

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (f-c)\langle A(m,\nabla f), n\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big| \le \nu_1 \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f-c||\nabla_1 f||\nabla f|^{p-2} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} +$$

$$+\nu \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f-c||\nabla f|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} =$$

$$= \nu_1\, I_3 + \nu\, I_4\,. \tag{4.1.42}$$

Определим величину

$$\mu_p(\Sigma_h(\tau)) = \inf_{\phi} \frac{\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_2 \phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}}{\Big(\inf\limits_{c} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{p-1}|\phi - c|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}}. \tag{4.1.43}$$

В случае $|\nabla h| \equiv 1$ эта величина может быть интерпретирована как наилучшая из постоянных в неравенстве Виртингера. Как и выше, следуя Полиа и Сеге [96], будем называть эту величину *основной частотой* свободной мембраны $\Sigma_h(\tau)$.

Фиксируем постоянную c в (4.1.42) так, чтобы

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{p-1}|f-c|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \leq k^p \mu_p^{-p}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}},$$

где $k > 1$ – некоторая, предварительно заданная постоянная.

Пользуясь неравенством Гельдера, имеем

$$I_4 \leq \Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{p-1}|f-c|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{(p-1)/p}$$

и, далее,

$$I_4 \leq k\mu_p^{-1}(\Sigma_h(\tau))\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{1/p} \times \tag{4.1.44}$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big)^{(p-1)/p}.$$

Чтобы оценить интеграл I_3, поступаем в точности тем же самым путем как при оценке интеграла I_1 в 4.1.1. При $p \leq 2$ имеем

$$I_3 \leq k\mu_p^{-1}(\Sigma_h(\tau))2^{1-\frac{p}{2}}p^{-1}(p-1)^{1-\frac{1}{p}} \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}(|\nabla_1 f|^p + |\nabla_2 f|^p) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Объединяя данное неравенство с (4.1.44) и (4.1.42), получаем

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (f-c)\langle A(m,\nabla f), n\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big| \leq \tag{4.1.45}$$

$$\leq k\, c_1 \mu_p^{-1}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,,$$

где постоянная c_1 определена соотношением (4.1.12).

В случае $p \geq 2$ имеем

$$I_3 \leq \frac{p-1}{p} k \mu_p^{-1}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}$$

и, далее,

$$\Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (f-c)\langle A(m, \nabla f), n\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \Big| \leq \tag{4.1.46}$$

$$\leq k\, c_2 \mu_p^{-1}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla f|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,,$$

где постоянная c_2 определена соотношением (4.1.12).

Так как $k > 1$ произвольно, то соотношения (4.1.41), (4.1.45), (4.1.46) влекут следующее утверждение.

Теорема 4.1.7 *Если $\mathcal{F}_B$ есть один из вышеописанных классов решений уравнений* (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16), *то для всякого $\tau \in (0, \infty)$ выполнено*

$$\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_B) \geq c^{-1} \mu_p(\Sigma_h(\tau)) \tag{4.1.47}$$

где постоянная c, как в теореме 4.1.1.

Из теорем 4.1.7 и 2.3.6 вытекает следующая форма принципа Фрагмена - Линделефа для решений квазилинейных уравнений эллиптического типа с нулевыми граничными данными Неймана.

Теорема 4.1.8 *Пусть $f(m)$ – обобщенное решение уравнения* (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) *на многообразии $\mathcal{M}$, удовлетворяющее нулевому граничному условию Неймана* (2.3.16). *Тогда либо $f(m) \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{M}$, либо $f(m) \not\equiv \mathrm{const}$ и*

$$\liminf_{\tau \to \infty} \int\limits_{B_h(\tau)} |\nabla f(m)|^p * \mathbb{1} \exp\Big\{-C \int^{\tau} \mu_p(\Sigma_h(t)) dt\Big\} > 0,$$

$$\liminf_{\tau \to \infty} \int\limits_{\tau < h(m) < \tau+1} |\nabla h|\, |f(m) - A|\, |\nabla f|^{p-1} * \mathbb{1} \exp\Big\{-C \int^{\tau} \mu_p(\Sigma_h(t)) dt\Big\} > 0,$$

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{\tau<h(m)<\tau+1} |\nabla h|^p |f(m) - A|^p * \mathbb{1} \exp\Big\{-C \int\limits^{\tau} \mu_p(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0.$$

Здесь $A = A(\tau)$ есть произвольная постоянная (которая может быть зависящей от τ), $C = \nu_2^{p/(p-1)} \Big/ c\,\nu_1$ и c – постоянная из теоремы 4.1.1.

Для **доказательства** достаточно положить $Z_0 = A(\tau)$ в теореме 2.3.6 и воспользоваться неравенством (4.1.47). □

4.1.6 Основная частота подмножеств h-сферы

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие и пусть

$$h(m) : \mathcal{M} \to (0, \infty)$$

– функция исчерпания $\mathcal{M}$. Предположим, что для некоторого $\tau_0 \in (0, \infty)$ h-сфера $\Sigma = \Sigma_h(\tau_0)$ является C^1-многообразием, удовлетворяющим следующему условию θ-изопериметричности: *существует непрерывная функция $\theta(t), t \in [0, V_0]$,*

$$V_0 = \int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\,,$$

такая, что для каждой из областей $D \subset \Sigma$ выполнено

$$\theta\Big(\int\limits_D |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}\Big) \leq \int\limits_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-2}\,. \tag{4.1.48}$$

Здесь $d\mathcal{H}^{n-2}$ есть элемент $(n-2)$-мерной меры на ∂D.
Теорема 4.1.9 *Если h-сфера Σ удовлетворяет условию* (4.1.48), *то*

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau_0)) \geq \inf \frac{\Big(\int\limits_0^{V_0} \theta^p(v)|t'(v)|^p dv\Big)^{1/p}}{\Big(\int\limits_0^{V_0} t^p(v) dv\Big)^{1/p}}, \tag{4.1.49}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным невозрастающим абсолютно непрерывным функциям на $[0, V_0]$ *с* $t(V_0) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся уже использованным выше приемом получения подобных оценок для подобластей $\mathbb{R}^n$ (см. доказательство теоремы 3.3.1.

Не ограничивая общности мы можем предполагать, что в вариационной проблеме (4.1.7) достаточно ограничиться неотрицательными, локально липшицевым функциям ϕ. Фиксируем произвольно функцию ϕ, $\operatorname{supp}\phi \subset \Sigma$ и применим формулу Кронрода – Федерера. Мы имеем

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{p-1} |\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \int\limits_0^\infty t^p dt \int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|} d\mathcal{H}^{n-2},$$

где $E_t = \{m \in \Sigma : \phi(m) = t\}$ и $\nabla\phi = \nabla_2\phi$ есть градиент ϕ на Σ.

Положим

$$v(t) = \int\limits_{\phi \geq t} |\nabla h|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Так как

$$v(t) = \int\limits_t^\infty d\tau \int\limits_{E_\tau} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|} d\mathcal{H}^{n-2},$$

то

$$v'(t) = -\int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|} d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{p-1} |\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \int\limits_0^{V_0} t^p(v)\, dv. \tag{4.1.50}$$

В силу аналогичных аргументов, можем также записать

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{-1} |\nabla\phi|^p d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_{E_t} |\nabla h|^{-1} |\nabla \phi|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{E_t} d\mathcal{H}^{n-2} \leq \Big(\int\limits_{E_t} \frac{|\nabla\phi|^{p-1}}{|\nabla h|}\, d\mathcal{H}^{n-2}\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla\phi|}\, d\mathcal{H}^{n-2}\Big)^{(p-1)/p},$$

и, тем самым,

$$\int\limits_{E_t} |\nabla h|^{-1}\, |\nabla\phi|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-2} \geq |v'(t)|^{1-p}\Big(\int\limits_{E_t} d\mathcal{H}^{n-2}\Big)^{p}.$$

Пользуясь изопериметрическим условием (4.1.48), находим

$$\int\limits_{E_t} d\mathcal{H}^{n-2} \geq \theta(v(t))$$

и, более того,

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{-1}|\nabla\phi|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \geq \int\limits_0^{V_0} \theta^p(v(t))\, |t'(v)|^p\, dv. \tag{4.1.51}$$

Объединяя теперь (4.1.7), (4.1.50) и (4.1.51), получаем

$$\frac{\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{-1}\, |\nabla\phi|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}}{\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{p-1}\, |\phi|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}} \geq \frac{\int\limits_0^{V_0} \theta^p(v)\, |t'(v)|^p\, dv}{\int\limits_0^{V_0} t^p(v)\, dv},$$

что влечет (4.1.49). □

Рассмотрим специальный случай θ-изопериметрических многообразий с $\theta(t) = t^{(k-1)/k}$ и произвольной постоянной $k \geq 1$. Положим

$$j(p,k) = \inf \frac{\int\limits_0^1 v^{\frac{p(k-1)}{k}} |t'(v)|^p \, dv}{\int\limits_0^1 t^p(v) \, dv},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным невозрастающим на $[0,1]$, абсолютно непрерывным функциям $t(v)$, $t(1) = 0$.

В силу (4.1.49), имеем

Следствие 4.1.1 *Если многообразие* $\Sigma = \Sigma_h(\tau_0)$ *является* θ*-изопериметрическим с* $\theta(t) = t^{(k-1)/k}$, $k \geq 1$, *то*

$$\lambda_p(\Sigma_h(\tau_0)) \geq V_0^{-1/k} \, j^{1/p}(p,k).$$

При $k = 1$ введенная величина хорошо известна (см. раздел 3.3.2). Здесь имеем

$$j(p,1) = (p-1) \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} \right)^{-p}. \tag{4.1.52}$$

4.1.7 Оценки для N-средних

Предположим, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является 1-допустимой в смысле примера 1.1.10 и воспользуемся здесь ранее введенными обозначениями. Заметим сначала, что для всякого $t > \operatorname{dist}(0, D)$ множество $\Sigma = \Sigma_1(t)$ есть открытое множество, расположенное на паре параллельных $(n-1)$-мерных плоскостей.

Предположим, что это множество лежит лишь в одной из гиперплоскостей, т.е. $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда Σ является θ-изопериметричным с

$$\theta(t) = \omega_{n-2}^{1/(n-1)} (n-1)^{(n-2)/(n-1)} t^{(n-2)/(n-1)},$$

где ω_{n-2} – $(n-2)$-мерная мера на сфере радиуса 1 в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Теорема 4.1.9 приводит к оценке

$$\lambda_p(\Sigma) \geq c \, |\Sigma|^{1/(1-n)}, \quad |\Sigma| = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma), \tag{4.1.53}$$

где
$$c = (n-1)^{(n-2)/(n-1)}\,\omega_{n-2}^{1/(n-1)}\,j(p,n-1)^{1/p}$$
и равенство достигается тогда и только тогда, когда Σ – шар.

Неравенство (4.1.53), кроме непосредственной оценки основной частоты, служит источником грубой, однако достаточно эффективной оценки ее N-средних. Именно, как показано в [72], справедлива

Лемма 4.1.1 *Для произвольного открытого множества* $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *выполнено*
$$\lambda_p(\Sigma;N) \geq c\left(\frac{N}{|\Sigma|}\right)^{1/(n-1)}, \tag{4.1.54}$$
где c есть постоянная из (4.1.53). *При $n=2$ имеем знак равенства.*

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 3.3.2 и опускается. □

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная неограниченная область. Для фиксированного $\tau > \operatorname{dist}(0,D)$ пусть $\Sigma = \Sigma_n(\tau)$ означает пересечение D со сферой $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \tau\}$. Область D является n-допустимой.

Не умаляя общности мы можем предполагать, что Σ есть открытое подмножество $(n-1)$-мерной сферы единичной площади $(n \geq 3)$ так, что радиус $\tau = \omega_{n-2}^{1/(2-n)}$.

Многообразие Σ является θ-изопериметрическим с функцией
$$\theta(t) = c\,\min\left\{t^{(n-2)/(n-1)}, (1-t)^{(n-2)/(n-1)}\right\},$$
где постоянная
$$c = c(n) = \left(\int\limits_0^1 (2t-t^2)^{(n-3)/2}dt\right)^{-1}$$
при $n \geq 4$ и $c(3) = 2$.

Имеет место утверждение.

Лемма 4.1.2 *Если* $\partial\Sigma \neq \emptyset$, *то*
$$\lambda_p(\Sigma;N) = c_1(2)\,\frac{N}{|\Sigma|} \tag{4.1.55}$$

при $n = 2$;

$$\lambda_p(\Sigma; N) \geq c_1(n-1)\left(\frac{N}{|\Sigma|}\right)^{1/(n-1)} \tag{4.1.56}$$

при $n \geq 3$ *и* $|\Sigma| \leq \frac{1}{2}$;

$$\lambda_p(\Sigma; N) \geq c_1(n-1)\,\frac{N-1}{N}\Big(\frac{N-1}{|\Sigma|}\Big)^{1/(n-1)} \tag{4.1.57}$$

при $n \geq 3$ *и* $|\Sigma| \geq \frac{1}{2}$.

Здесь $c_1(n-1) = c(n)j^{1/p}(p,n)$ *и* $c(n)$ *есть постоянная из изопериметрического неравенства.*

Доказательство. Соотношение (4.1.55) проверяется в точности так же, как и в лемме 4.1.1.

Пусть $n \geq 3$ и пусть Σ_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ – произвольная система открытых, попарно не пересекающихся подмножеств множества Σ. Предположим, что $|\Sigma_i| \leq \frac{1}{2}$ при всех $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда $\theta(t) = c_1 t^{\frac{n-2}{n-1}}$ и из (4.1.49) вытекает

$$\lambda_p(\Sigma_i) \geq c\, j^{\frac{1}{p}}(p, n-1)|\Sigma_i|^{\frac{1}{1-n}}\,.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4.1.1, получаем

$$c_1(n-1)\left(\frac{N}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_p(\Sigma_i)\,. \tag{4.1.58}$$

Предположение $|\Sigma| \leq \frac{1}{2}$ в высказывании (4.1.56) влечет, таким образом, неравенство (4.1.58), что доказывает (4.1.56).

Пусть $|\Sigma| > \frac{1}{2}$. Тогда одно из множеств Σ_i, например Σ_N, может иметь объем больше $\frac{1}{2}$, а для остальных Σ_i имеем $|\Sigma_i| \leq \frac{1}{2}$. В силу (4.1.58), имеем

$$c_1(n-1)\left(\frac{N-1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_p(\Sigma_i)\,.$$

Отсюда

$$c_1(n-1)\frac{N-1}{N}\left(\frac{N-1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_p(\Sigma_i)\,,$$

что доказывает утверждение (4.1.57). □

Пример 4.1.1 Приведенное выше неравенство (4.1.54) для N-средних основной частоты имеет, в определенном смысле, правильный рост при $N \to \infty$. Покажем это на следующем примере.

Рассмотрим n-мерный куб $Q(1) \subset \mathbb{R}^n$ со стороной 1. Зафиксируем целое $N = k^n$, $k = 1, 2, \ldots$. Разобъем куб $Q(1)$ на k^n кубов Q_i, $i = 1, \ldots, k^n$, со сторонами длины $1/k$ посредством системы $(n-1)$-мерных плоскостей, параллельных $(n-1)$-мерным координатным плоскостям в $\mathbb{R}^n$.

При $p > 1$ имеем

$$\lambda_p(Q(1); k^n) \le k^{-n} \sum_{i=1}^{N} \lambda_p\Big(Q_i\Big) = \lambda_p\Big(Q_1\Big).$$

Куб Q_1 гомотетичен $Q(1)$ с коэффициентом подобия k. Согласно лемме 3.3.3 мы вправе записать $\lambda_p(Q_1) = k\lambda_p(Q(1))$. Таким образом,

$$\lambda_p(Q(1); k^n) \le k\lambda_p(Q(1))$$

или

$$\lambda_p(Q(1); N) \le N^{\frac{1}{n}} \lambda_p(Q(1)) \tag{4.1.59}$$

при всяком $N = k^n$, $k = 1, 2, \ldots$.

□

Пример 4.1.2 При $N = 1$ неравенство (4.1.57) тривиально, что фактически свидетельствует о недостаточной точности метода его доказательства. Покажем, что на самом деле *для всякого* $p > n - 1$ *выполнено*

$$\lambda_p(S^{n-1}(R); 1) \ge \frac{C}{R}, \quad n \ge 3, \tag{4.1.60}$$

где $C > 0$ *– некоторая постоянная, зависящая только от* n.

Действительно, в соответствии с леммой 3.3.3, имеет место равенство

$$\lambda_p(S^{n-1}(R); 1) = R^{-1} \lambda_p(S^{n-1}(1); 1)$$

и, тем самым,

$$\lambda_p(S^{n-1}(R); 1) = R^{-1} \inf_U \lambda_p(U),$$

где $U \subset S^{n-1}(1)$ есть произвольное открытое множество и $\partial U \neq \emptyset$.

По теореме вложения С.Л. Соболева при $p > n-1$ существует постоянная $0 < C_1 < \infty$ такая, что для всякой функции $g \in W^{1,p}(S^{n-1}(1))$ выполнено

$$\operatorname{osc}^p\{g; S^{n-1}(1)\} \leq C_1 \int\limits_{S^{n-1}(1)} |\nabla g|^p dS^{n-1}(1)$$

(см., например, [168, теорема 2.7]).

Пусть $\phi \in W^{1,p}(U)$, $\operatorname{supp}\phi \subset U$. Аппроксимируя ϕ посредством C^1-функций с компактным носителем, лежащим в U, и доопределяя эти функции 0 в $S^{n-1}(1) \setminus U$, получаем

$$\int\limits_U \phi^p \, dS^{n-1}(1) \leq C_2 \operatorname{osc}^p\{\phi; U\} \leq C_3 \int\limits_U |\nabla\phi|^p \, dS^{n-1}(1)$$

с некоторой постоянной $0 < C_3 < \infty$.

Отсюда мы вправе заключить, что

$$\frac{\int\limits_U |\nabla\phi|^p \, dS^{n-1}(1)}{\int\limits_U \phi^p \, dS^{n-1}(1)} \geq \frac{1}{C_3}$$

и, далее,

$$\lambda_p(U) \geq \frac{1}{C_3}.$$

Тем самым,

$$\lambda_p(S^{n-1}(1); 1) \geq \frac{1}{C_3},$$

что влечет (4.1.60).

$\square$

4.1.8 β-Изопериметрия

Приведем оценку основной частоты свободной мембраны. Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное риманово многообразие и $h(m) : \mathcal{M} \to (0, \infty)$ – его функция исчерпания. Предположим, что для некоторого $\tau_0 \in (0, \infty)$ h-сфера $\Sigma = \Sigma_h(\tau_0)$ есть C^1-многообразие.

Для открытого множества $\Delta \subset \Sigma$ полагаем

$$U(\Delta) = \int\limits_{\Delta} |\nabla h|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Будем говорить, что h-сфера Σ является β-изопериметричной, если существует непрерывная функция $\beta(t)$, $t \in [0, \frac{1}{2}U(\Sigma)]$, такая, что для любого открытого множества $\Delta \subset \Sigma$ имеет место неравенство

$$\beta(\min\{U(\Delta), U(\Sigma) - U(\Delta)\}) \le \int\limits_{\partial\Delta} d\mathcal{H}^{n-2}. \tag{4.1.61}$$

Пример 4.1.3 Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – 1-допустимая область в смысле примера 1.1.10. Фиксируем $t > \operatorname{dist}(0, D)$. Предположим, что $\Sigma = \Sigma_1(t)$ есть $(n-1)$-мерная сфера радиуса 1.

В соответствии с леммой 1 [65, §3.2] для произвольной подобласти $\Delta \subset \Sigma$ имеем

$$\min\{U(\Delta), U(\Sigma) - U(\Delta)\} \le \frac{1}{2}\, \omega_{n-1}\, \omega_{n-2}^{(n-1)/(2-n)} \Big(\mathcal{H}^{n-2}(\partial\Delta)\Big)^{(n-1)/(n-2)}$$

где ω_s – площадь единичной s-мерной сферы.

Таким образом, *область Σ является β-изопериметричной с функцией*

$$\beta(t) = 2^{(n-2)/(n-1)}\, \omega_{n-1}^{(2-n)/(n-1)}\, \omega_{n-2}\, t^{(n-2)/(n-1)}\,.$$

□

Другие примеры изопериметрических неравенств и дальнейшее обсуждение темы см. в [20, §7, глава 3].

Теорема 4.1.10 *Если h-сфера $\Sigma = \Sigma_h(\tau_0)$ является β-изопериметричной и имеет место* (4.1.61), *то*

$$\mu_p\big(\Sigma_h(\tau_0)\big) \ge \inf \frac{\Big(\int\limits_0^{U(\Sigma)} \beta^p(\min\{x, U(\Sigma) - x\})\, |t'(x)|^p \, dx\Big)^{1/p}}{\Big(\inf\limits_c \int\limits_0^{U(\Sigma)} |t(x) - c|^p \, dx\Big)^{1/p}}, \tag{4.1.62}$$

где точная нижняя грань берется по всем невозрастающим, абсолютно непрерывным функциям $t(x)$ на $[0, U(\Sigma)]$ с $t(U(\Sigma)) = 0$.

Доказательство базируется на соображениях, использованных в доказательстве теоремы 4.1.9. Легко видеть, что в вариационной проблеме 4.1.7 можно ограничится классом локально липшицевых функций ϕ.

Положим

$$u(t) = \int\limits_{\phi<t} |\nabla h|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}}.$$

Интегрируя по множествам уровня $E_t = \{m \in \Sigma : \phi(m) = t\}$, имеем

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt \int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|}\, d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Таким образом,

$$u'(t) = \int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|}\, d\mathcal{H}^{n-2},$$

и мы получаем

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{p-1}\, |\phi - c|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \tag{4.1.63}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t - c|^p\, dt \int\limits_{E_t} \frac{|\nabla h|^{p-1}}{|\nabla \phi|}\, d\mathcal{H}^{n-2} = \int\limits_{0}^{U(\Sigma)} |t(u) - c|^p\, du.$$

Далее находим

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{-1}\, |\nabla \phi|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{E_t} \frac{|\nabla \phi|^{p-1}}{|\nabla h|}\, d\mathcal{H}^{n-2}.$$

Как при доказательстве теоремы 4.1.9 будем иметь

$$\int\limits_{E_t} \frac{|\nabla \phi|^{p-1}}{|\nabla h|}\, d\mathcal{H}^{n-2} \geq |u'(t)|^{1-p} \left(\int\limits_{E_t} d\mathcal{H}^{n-2} \right)^p,$$

что, в силу β-изопериметричности многообразия Σ, дает

$$\int\limits_{E_t} \frac{|\nabla\phi|^{p-1}}{|\nabla h|}\, d\mathcal{H}^{n-2} \geq \beta^p(\min\{u(t), U(\Sigma)-u(t)\})\,|t'(u(t))|^{p-1}.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Sigma} |\nabla h|^{-1}\,|\nabla\phi|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \geq \int\limits_{0}^{U(\Sigma)} \beta^p(\min\{u, U(\Sigma)-u\})\,|t'(u)|^p\, du. \qquad (4.1.64)$$

Объединяя (4.1.63) и (4.1.64), убеждается в справедливости (4.1.62). □

4.2 Критические точки решения

Ниже мы следуем работе [200].

4.2.1 Основная теорема

В данном разделе предполагаем, что $\mathcal{X}$ – $n-$мерное риманово C^3-многообразие с краем или без края. Пусть, как и выше, $d(x', x'')$ – расстояние между точками $x', x'' \in \mathcal{X}$,

$$B(a,t) = B_{\mathcal{X}}(a,t)\,, \quad \Sigma(a,t) = \Sigma_{\mathcal{X}}(a,t) = t$$

– геодезический шар и геодезическая сфера, соответственно.

Рассматриваемый класс уравнений несколько отличается от введенного ранее. Поэтому целесообразно описать его здесь заново.

Пусть

$$A : T(\mathcal{X}) \to T(\mathcal{X})$$

– отображение, удовлетворяющее предположениям (i), (ii) раздела 3.2.1. Будем предполагать дополнительно, что для почти всех $x \in \mathcal{X}$ и всех $\xi \in T_x$ имеют место соотношения

$$\nu_1\,|\xi|^n \leq \langle \xi, A(x,\xi)\rangle, \qquad (4.2.65)$$

$$|A(x,\xi)| \leq \nu_2\,|\xi|^{n-1}. \qquad (4.2.66)$$

Положим $\nu = \nu_2/\nu_1$. Тогда $\nu \geq 1$. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla f) = 0\,. \qquad (4.2.67)$$

Непрерывная функция f класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$ является обобщенным решением уравнения (4.2.67), кратко A−решением в $\mathcal{X}$, если для всякой функции $\phi \in W^{1,n/(n-1)}(\mathcal{X})$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\phi \subset \mathcal{X}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \langle \nabla\phi, A(x,\nabla f)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = 0\,. \tag{4.2.68}$$

Хорошо известный пример уравнения вида (4.2.65) – (4.2.67) доставляет уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla f|^{n-2}\nabla f) = 0\,, \tag{4.2.69}$$

обращающееся в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ при $n = 2$.

Сформулируем основное утверждение раздела — теорему типа теоремы Сарда. Если f есть решение (4.2.67), то наше утверждение состоит в том, что множество точек, в которых f достаточно сильно ветвится, имеет своим образом множество малой хаусдорфовой меры.

Определим постоянные

$$\gamma = \gamma(n,\nu_1,\nu_2) = \frac{n}{n-1}\big(1+\sqrt{\nu^2-1}\big)^{-(n+1)/n},$$

где $\nu = \nu_2/\nu_1$, ν_1, ν_2 суть постоянные из (4.2.65), (4.2.66),

$$\lambda_n = c(n)\,2^{-n/(n-1)}\,\omega_{n-1}^{-1/(n-1)}, \quad c(n) = \Big(\int\limits_0^1 (2t-t^2)^{(n-2)/2}\,dt\Big)^{-1} \tag{4.2.70}$$

и ω_{n-1} – $(n-1)$−мерная мера $S^{n-1}(0,1)$.

В этих обозначениях имеем

Теорема 4.2.1 *Пусть f – непрерывное решение уравнения* (4.2.67) *со структурными условиями* (4.2.65) – (4.2.66) *в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Пусть целое $N_0 > 1$ таково, что*

$$\alpha = \frac{\gamma}{n\nu}\,\lambda_n(S^{n-1}(0,1), N_0) > n, \tag{4.2.71}$$

или

$$N_0 > \Big(\frac{n^2\,\nu}{\gamma\lambda_n}\Big)^{n-1}. \tag{4.2.72}$$

Тогда при всех $N \geq N_0$ множество $f(E(N)) \subset \mathbb{R}$ имеет (локально) конечную n/α-меру Хаусдорфа, где

$$E(N) = \{a \in D : N(a) \geq N\}.$$

Число $N(a)$ означает число "хороших" компонент связности множества $B(a,r) \setminus E_f$, где E_f есть множество уровня f. Точное определение см. ниже в разделе 4.2.4.

С качественной точки зрения величина $N(a)$ есть некоторый заменитель для индекса критической точки $W^{1,n}$-решения, а множество $E(N)$ является множеством точек с "большим индексом".

4.2.2 Псевдогармонические функции

Рассмотрим сначала двумерный случай. Пусть $\mathcal{X}$ – риманово многообразие размерности $n = 2$. Пусть $a \in \mathcal{X}$ – фиксированная точка и $B(a,r) \subset \mathcal{X}$ – геодезический круг достаточно малого радиуса. Если f – решение уравнения (4.2.67) на $\mathcal{X}$, то мы полагаем

$$B(a,r) \setminus E_f\,, \quad E_f = \{x \in B(a,r) : f(x) = f(a)\},$$

имеет $2s < \infty$ компонент связности, где $s \geq 1$ – целое, или

$$B(a,r) \setminus E_f = \emptyset\,,$$

если f – постоянная.

Определение 4.2.1 (М. Морс [216]). *Если $s > 1$, то точка a называется критической точкой решения f. Число $i_f(a) = s - 1$ называется топологическим индексом критической точки a.*

В действительности Морс рассматривал гармонические функции, однако его локальный анализ может быть распространен на псевдогармонический случай, см. [216]. Это вытекает из того факта, что f является псевдогармонической тогда и только тогда, когда эта функция представима локально в виде

$$f = \phi \circ T,$$

где $T : B(a,r) \to \mathcal{Y}$ – некоторое топологическое отображение и ϕ – гармоническая функция в $\mathcal{Y}$.

Легко доказать, что при выполнении условий (4.2.65), (4.2.66) всякое обобщенное решение f уравнения (4.2.67) есть псевдогармоническая функция.

Чтобы обосновать это, зафиксируем $r > 0$ так, чтобы 2-мерная область $U = B(a, r)$ была односвязной. Рассмотрим на U дифференциальную 1-форму

$$\theta_f(x) = \langle A(x, \nabla f), dx \rangle, \quad dx \in T_x\,.$$

В силу структурных условий (4.2.66), форма $\theta_f(x) \in L^2_{loc}(U)$.

Пусть $*\,\theta_f(x)$ – форма, ортогональная форме $\theta_f(x)$. Уравнение (4.2.67) означает что форма $*\,\theta_f(x) \in L^2_{loc}(U)$ является слабо замкнутой, и, в частности,

$$\int\limits_U d\phi \wedge *\,\theta_f = 0, \quad \forall\ \phi \in \mathrm{Lip}\,(U), \quad \mathrm{supp}\,\phi \subset U. \tag{4.2.73}$$

Действительно, мы имеем

$$\int\limits_U d\phi \wedge *\,\theta_f = \int\limits_U \langle \nabla\phi, A(x, \nabla f) \rangle\ *\mathbb{1}$$

и предположения (4.2.68), (4.2.73) эквивалентны.

Так как U односвязна, по теореме Фробениуса найдется функция $g \in Lip_{\rm loc}(U)$ такая, что $dg = *\theta_f(x)$ [15] – [16].

Комплекснозначная функция $w = f + i\,g\ : U \to C$ принадлежит классу $W^{1,2}_{\rm loc}(U)$ и имеет якобиан

$$J(w) = |df \wedge dg| = \langle \nabla f, A(x, \nabla f) \rangle \geq \nu_1 |\nabla f|^2 \geq 0.$$

Из предположения (4.2.66) следует,

$$|w'|^2 = |\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 = |\nabla f|^2 + |A(x, \nabla f)|^2 \leq$$
$$\leq (1 + \nu_2^2)|\nabla f|^2 \leq \nu_1^{-1}(1 + \nu_2^2) J(w)\,.$$

Так как данное предположение выполнено почти всюду в U, ясно, что вектор-функция w есть отображение с ограниченным искажением. Тем самым, справедливо представление $w = \zeta \circ \xi$, где ξ есть некоторое (однолистное) квазиконформное отображение и ζ – голоморфная функция. В частности, для функции f мы имеем

$$f = (\mathrm{Re}\,\zeta) \circ \xi,$$

и, тем самым, f является псевдогармонической функцией. Отсюда вытекает, что имеет место утверждение.

Теорема 4.2.2 *Пусть* $\dim \mathcal{X} = 2$, *и пусть* f *– непостоянное решение* (4.2.67), *удовлетворяющее* (4.2.65), (4.2.66) *на многообразии* $\mathcal{X}$. *Тогда каждая из точек* $a \in \mathcal{X}$ *имеет конечный индекс* $i_f(a)$ *и множество всех критических точек* f *является дискретным множеством точек на многообразии* $\mathcal{X}$.

4.2.3 Контрпример Мартио

В случае $n \geq 3$ ситуация более сложная. Имеет место следующее утверждение, принадлежащее Мартио [197].

Теорема 4.2.3 *Для каждого* $n \geq 3$ *существуют функция* $A(x,\xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющая* (4.2.65), (4.2.66), *и непостоянное решение* $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *уравнения* (4.2.67) *такое, что*

$$\mathrm{int}\,\{x \in \mathbb{R}^n : f_0(x) = 0\} = H_-,$$

где H_- *– есть полупространство* $x_n < 0$ *пространства* $\mathbb{R}^n$.

Для каждой точки a в гиперплоскости $\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, и для каждого $r > 0$ множество

$$E_{f_0} = \{x \in B(a,r) : f_0(x) = f_0(a)\}$$

обладает свойством

$$\mathrm{int}\, E_{f_0} \neq \emptyset. \tag{4.2.74}$$

Каждая точка $x \in \mathrm{int}\, E_{f_0}$ является критической точкой функции f_0 также и в классическом смысле $\nabla f_0(x) = 0$.

Уравнение (4.2.67), описываемое в теореме 4.2.3, имеет разрывные коэффициенты $A_i(x,\xi), i = 1, 2, ..., n$. Вместе с тем мы не знаем существуют ли решения f_0 уравнения (4.2.69), обладающие свойством (4.2.74)? Существуют ли подобные примеры уравнений с непрерывными (гладкими) коэффициентами?

4.2.4 N-точки

С точки зрения указанного выше примера полезно различать два типа поведения решения в критической точке. Пусть f – непрерывное, обобщенное решение уравнения (4.2.67). Фиксируем точку $a \in D \subset \mathcal{X}$ и геодезический шар $B(a,r) \subset \mathcal{X}$, $r > 0$. Пусть $O_1, O_2, \ldots$ – компоненты связности множества

$$B(a,r) \setminus \partial\, E_f, \quad \partial\, E_f = E_f \setminus \operatorname{int} E_f$$

такие, что $a \in \overline{O}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Предположим, что для такой точки a существует, как минимум, одна из компонент O_i с этими свойствами. Мы будем называть такие точки $a \in D$ *регулярными точками* функции f.

При $\varepsilon \in (0, r)$ мы пишем

$$\sigma_i(a,\varepsilon) = O_i \cap \Sigma(a,\varepsilon), \quad b_i(a,\varepsilon) = O_i \cap B(a,\varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и

$$m(a,\varepsilon) = \sup_{x \in \Sigma(a,\varepsilon)} |f(x) - f(a)|,$$

$$m_i(a,\varepsilon) = \sup_{x \in \sigma_i(a,\varepsilon)} |f(x) - f(a)|, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Принцип максимума – минимума для решений (4.2.67) влечет, что

$$\overline{O_i} \cap \Sigma(a,r) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и этот же принцип показывает, что функция $m_i(a,\varepsilon)$ неубывает с увеличением ε.

Пусть $a \in D$ – регулярная точка f. Компонента связности O_i называется *сильной компонентой*, если

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m_i(a,\varepsilon)}{m(a,\varepsilon)} > 0. \tag{4.2.75}$$

Будем говорить, что O_i является *слабой компонентой*, если

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{m_i(a,\varepsilon)}{m(a,\varepsilon)} = 0. \tag{4.2.76}$$

Полупространство H_- в теореме 4.2.3 есть слабая компонента.

Пусть f – решение на $\mathcal{X}$ и пусть f – непостоянно в окрестности точки a. Если число областей O_i остается конечным при $r \to 0$, то *множество* $B(a,r)\setminus\partial\, E_f$ *имеет хотя бы одну сильную компоненту связности* O_i.

Заметим, что число компонент связности O_i может зависеть от r и это число может возрастать при $r \to 0$.

Для произвольного $r > 0$ пусть $O_i(r)$, $i = 1, 2, ..., n(r)$, – сильные компоненты связности множества $B(a,r)\setminus\partial\, E_f$. Положим

$$N(a) = \liminf_{r\to 0} n(r)$$

– порядок a.

4.2.5 Специальный случай теоремы 2.3.3

Пусть $a \in \mathcal{X}$, $r > 0$, и пусть O_i – компонента связности множества $B(a,r)\setminus\partial\, E_f$, $a \in \overline{O}_i$. Рассмотрим 1–форму

$$\theta_f(x) = \langle A(x,\nabla f), dx\rangle, \quad dx \in T_x(\mathcal{X}),$$

и форму $*\,\theta_f(x)$, ортогональную форме $\theta_f(x)$ и степени $\deg(*\,\theta_f(x)) = n-1$.

Форма $*\,\theta_f(x)$ слабо замкнута. Пусть $w_f(x) = f(x)\,*\,\theta_f(x)$. Положим формально $dw_f = df \wedge *\,\theta_f$. Тем самым,

$$*\,dw_f = *\,(df \wedge *\,\theta_f) = \langle \nabla f, A(x,\nabla f)\rangle. \tag{4.2.77}$$

Для почти всех $\tau \in (0,r)$ определена величина

$$\varepsilon_i(a,\tau) = \sup_{w_0\in\mathcal{F}} \frac{\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} *\,dw_f}{\Big|\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (w_f - w_0)\Big|}. \tag{4.2.78}$$

Здесь $\mathcal{F}$ – класс дифференциальных форм

$$w_0 \in L^{n/(n-1)}(O_i)\,, \quad \deg w_0 = n-1,$$

подчиненных условию

$$\int\limits_{b_i(a,\tau)} df \wedge *\theta_f = \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (w_f - w_0) \quad \text{для почти всех} \quad \tau \in (0,r). \tag{4.2.79}$$

Следующее утверждение представляет собой специальный случай теоремы 2.3.3.

Теорема 4.2.1 *Пусть* $0 < \tau_0 < \tau < r$. *Тогда*

$$\frac{d}{d\tau}\Big(I_i(\tau)\, \exp\Big\{-\frac{1}{\nu}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon_i(a,t)dt\Big\}\Big) \geq 0, \tag{4.2.80}$$

где

$$I_i(\tau) \equiv \int\limits_{b_i(a,\tau)} |\nabla f|^n * \mathbb{1}.$$

В частности, при любых $\tau_1 < \tau_2$, $\quad \tau_1,\, \tau_2 \in (0,r)$, *выполняется*

$$I_i(\tau_1) \leq I_i(\tau_2) \exp\{-\frac{1}{\nu}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon_i(a,t)\, dt\}. \tag{4.2.81}$$

4.2.6 Условия на многообразие

Пусть Σ – компонента связности геодезической сферы $\Sigma(a,t)$. Для произвольной пары точек $p, q \in \Sigma(a,t)$ пусть $\Gamma = \Gamma(p,q)$ означает семейство всевозможных локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma$, соединяющих p с q. Определим величину

$$\operatorname{mod}\Gamma = \inf \int\limits_{\Sigma} \rho^n\, d\mathcal{H}^{n-1} \Bigg/ \Big(\inf_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_{\gamma} \rho\, d\mathcal{H}^1\Big)^n,$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным, измеримым по Борелю функциям ρ на Σ. Если $\Gamma(p,q) = \emptyset$, то мы полагаем

$$\operatorname{mod}\Gamma = \infty\,.$$

Далее, следуя [198], полагаем

$$\mu_a(t) = \inf_{\Sigma}\inf_{p,q\in\Sigma} \operatorname{mod}\Gamma,$$

где первая из нижних граней берется по всем компонентам связности Σ множества $\Sigma(a,t)$. В частности, если непрерывная функция f принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(\Sigma(a,t))$, то

$$\mu_a(t) \sup_{\Sigma\subset\Sigma(a,t)} \mathrm{osc}^n(f,\Sigma) \le \int\limits_{\Sigma(a,t)} |\nabla f|^n \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{4.2.82}$$

(см. раздел 3.2.2).

Предположим, что в точке $a \in \mathcal{X}$ имеет место следующее свойство : *существует постоянная* $M = M(n,r) > 0$ *такая, что при всех*

$$t\,, \quad 0 < 2t < r\,,$$

выполнено

$$\int\limits_t^{2t} \mu_a(\tau)\, d\tau \ge M\,. \tag{4.2.83}$$

Ясно, например, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (4.2.83). Здесь $\mu_a(t) \ge c(n)/t$, и

$$\int\limits_t^{2t} \mu_a(\tau)\, d\tau \ge c(n) \ln 2$$

с некоторой постоянной $c(n)$ [243, лемма 5.29].

4.2.7 Поведение решения вблизи N-точки

Исследуем поведение решений f вблизи N-точек.

Теорема 4.2.4 *Пусть f – непрерывное решение уравнения* (4.2.67) *со структурными условиями* (4.2.65), (4.2.66) *на $n-$мерном римановом многообразии $\mathcal{X}$. Если многообразие $\mathcal{X}$ обладает свойством* (4.2.83) *в N-точке $a \in \mathcal{X}$, то*

$$\limsup_{t\to 0}\, m(a,t)\, \exp\{\frac{1}{n\nu N} \int\limits_{2t}^{r} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(a,\tau)\, d\tau\} < \infty. \tag{4.2.84}$$

Сформулируем некоторые применения этого утверждения для A-решения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.2.5 *Пусть f – непрерывное решение уравнения* (4.2.67) *со структурными условиями* (4.2.65), (4.2.66) *на подобласти $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для каждой $N-$точки $a \in \mathcal{X}$ выполнено*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{m(a,\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} < \infty\,, \tag{4.2.85}$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma}{n\nu}\,\lambda(S^{n-1}(0,1),N) \geq \frac{\gamma}{n\nu}\,\lambda_n N^{1/(n-1)} \tag{4.2.86}$$

и постоянные γ, $\lambda(S^{n-1}(0,1),N)$ и λ_n, как в лемме 4.2.3.

4.2.8 Доказательство теоремы 4.2.4

Фиксируем $N-$точку $a \in \mathcal{X}$ и $r > 0$. Пусть $O_1, O_2, \ldots, O_N$ – сильные компоненты связности множества $B(a,r) \setminus \partial\, E_f$. В силу (4.2.81), для всякой области O_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ имеет место неравенство

$$\exp\{\frac{1}{\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2} \varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}\,I_i(t_1) \leq I_i(t_2).$$

В соответствии с формулой Кронрода – Федерера можем записать

$$I_i(t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\nabla f|^n \frac{d\,\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla d(a,x)|}.$$

Однако,

$$|\nabla d(a,x)| = 1 \quad \text{почти всюду в } \mathcal{X}$$

и для всех $t \in (0,r)$, пользуясь (4.2.82), получаем

$$I_i(t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\nabla f|^n d\,\mathcal{H}^{n-1} \geq \int\limits_{t/2}^t m_i^n(a,\tau)\,\mu_a(\tau)\,d\tau.$$

Каждая из областей $O_i\,(i=1,2,\ldots,N)$ является сильной компонентой связности. Тем самым,

$$\liminf_{t\to 0}\frac{m_i(a,t)}{m(a,t)}\geq q_i,\quad i=1,2,\ldots,N,$$

с некоторыми постоянными $q_i>0$.

Пусть $q=\min\{q_1,q_2,\ldots,q_N\}$. Тогда имеем

$$I_i(t)\geq q^n\int\limits_{t/2}^{t}m^n(a,\tau)\,\mu_a(\tau)\,d\tau\geq q^n\,m^n(a,t/2)\int\limits_{t/2}^{t}\mu_a(\tau)d\tau$$

и при любых $t_1,t_2,\quad 0<t_1<t_2\leq r$, выполнено

$$q^n\,m^n(a,t_1/2)\int\limits_{t_1/2}^{t_1}\mu_a(\tau)\,d\tau\;\sum_{i=1}^{N}\exp\{\frac{1}{\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2}\varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{N}I_i(t_2)\leq\int\limits_{B(a,t_2)}|\nabla f|^n\,*\,\mathbb{1}\,.$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, находим

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\{\frac{1}{\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2}\varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}\geq\exp\{\frac{1}{\nu}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}.$$

Отсюда,

$$\int\limits_{B(a,t_2)}|\nabla f|^n\,*\,\mathbb{1}\geq q^n\,m^n(a,t_1/2)\,\exp\{\frac{1}{\nu N}\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}\int\limits_{t_1/2}^{t_1}\mu_a(\tau)\,d\tau,$$

или, при $t_1=2t$, $t_2=r$, $2t<r$,

$$m^n(a,t)\int\limits_{t}^{2t}\mu_a(\tau)\,d\tau\;\exp\{\frac{1}{\nu N}\int\limits_{2t}^{r}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(a,\tau)\,d\tau\}$$

$$\leq C(q) \int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^n * \mathbb{1}. \qquad (4.2.87)$$

Свойства (4.2.83) и (4.2.87) влекут справедливость теоремы 4.2.4.

Зафиксируем $t \in (0,r)$ и открытое подмножество $\sigma \subset \Sigma(a,t)$. Нам потребуется

$$\lambda(\sigma) \equiv \lambda_n(\sigma) = \inf \left(\frac{\int_\sigma |\nabla \phi|^n \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\int\limits_\sigma \phi^n \, d\mathcal{H}^{n-1}} \right)^{1/n}, \qquad (4.2.88)$$

где $\nabla \phi = \nabla_\sigma \phi$ означает градиент функции ϕ на геодезической сфере $\Sigma(a,t)$ и точная нижняя грань берется по всем функциям $\phi \in Lip_0(\sigma)$.

Рассмотрим фиксированную компоненту связности O_i множества

$$B(a,r) \setminus \partial E_f, \quad a \in \overline{O}_i \, .$$

Положим

$$\sigma = \sigma_i(a,\tau) = O_i \cap \Sigma(a,\tau).$$

Лемма 4.2.1 *Для почти всех $\tau \in (0,r)$ выполнено*

$$\gamma \, \lambda_n(\sigma_i(a,\tau)) \leq \varepsilon_i(a,\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (4.2.89)$$

Доказательство. Выберем в соотношении (4.2.78) форму

$$w_0 = f(a) * \theta_f(x).$$

Эта форма слабо замкнута, подчинена условию (4.2.79) и, тем самым, принадлежит классу $\mathcal{F}$. Таким образом, мы можем положить в (4.2.78)

$$\varepsilon_i(a,\tau) \geq \frac{\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} * \, dw_f}{\Big| \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (w_f - w_0) \Big|}.$$

Пользуясь равенством

$$\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} *\,dw_f = \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} \langle \nabla f, A(x,\nabla f)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\,,$$

получаем

$$\varepsilon_i(a,\tau) \geq \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} \langle \nabla f, A\rangle dH^{n-1} \Bigg/ \Bigg| \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (f(x)-f(a))\langle A, \nabla f), \nabla d\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}\Bigg|,$$

$$A = A(x,\nabla f), \quad d = d(a,x),$$

и, далее, на основании (4.2.65), находим

$$\varepsilon_i(a,\tau) \geq \nu_1 \frac{\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\nabla f|^n dH^{n-1}}{\left|\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (f(x)-f(a))\langle A, \nabla d\rangle d\,\mathcal{H}^{n-1}\right|}\,. \tag{4.2.90}$$

Оценку знаменателя в (4.2.90) удобно провести ниже, в процессе доказательства леммы 5.2.1. Сейчас же отметим лишь основные ее этапы. Именно, мы имеем

$$\left|\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (f(x)-f(a))\langle A(x,\nabla f), \nabla d(a,x)\rangle d\,\mathcal{H}^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |f(x)-f(a)||\langle A(x,\nabla f), \nabla d(a,x)\rangle| d\,\mathcal{H}^{n-1} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |f(x)-f(a)|^n\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/n} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\langle A(x,\nabla f),\nabla d(a,x)\rangle|^{n/(n-1)}\,d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{(n-1)/n}.$$

Предпоследний из интегралов оценивается с использованием (4.2.88)

$$\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |f(x)-f(a)|^n\,d\mathcal{H}^{n-1} \le$$

$$\le \lambda^{-n}(\sigma_i(a,\tau)) \int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\nabla_\sigma f(x)|^n\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Замечая, что в каждой точке дифференцируемости решения f выполнено

$$|\nabla_\sigma f(x)|^2 + |\langle\nabla d(a,x),\nabla f(x)\rangle|^2 = |\nabla f(x)|^2$$

и пользуясь структурными условиями (2.2.15) и (2.2.16), находим

$$|\langle\nabla d(a,x),A(x,\nabla f)\rangle| \le$$

$$\le \nu_1\,|\langle\nabla d(a,x),\nabla f(x)\rangle|\,|\nabla f(x)|^{n-2} + \nu_3\,|\nabla f(x)|^{n-1},$$

где $\nu_3=\sqrt{\nu_2^2-\nu_1^2}$.

После простых преобразований получаем

$$\left|\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} (f(x)-f(a))\langle A,\nabla d\rangle d\,\mathcal{H}^{n-1}\right| \le$$

$$\le \frac{n-1}{n}\left(\frac{\nu_1+\nu_3}{\nu_1}\right)^{1/n} \frac{\nu_1+\nu_3}{\lambda(\sigma_i(a,\tau))}\int\limits_{\sigma_i(a,\tau)} |\nabla f(x)|^n d\,\mathcal{H}^{n-1}.$$

(См. ниже доказательство леммы 5.2.1.)

Подставляя найденную оценку в (4.2.90), приходим к (4.2.89). □

Зафиксируем целое $N\ge 2$ и геодезическую сферу $\Sigma(a,t)$. Нам потребуются $N-$средние основной частоты

$$\lambda(t,N)\equiv\lambda_n(\Sigma(a,t),N).$$

Лемма 4.2.2 *Для почти всех $\tau \in (0, r)$ выполнено*

$$\gamma\,\lambda(\Sigma(a,\tau), N) \le \frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(a,\tau). \qquad (4.2.91)$$

Доказательство. Области $O_1, O_2, \ldots, O_N$ взаимно не пересекаются. Таким образом,

$$\sigma_i(a,\tau) \cap \sigma_j(a,\tau) = \emptyset, \quad i \ne j,$$

и на основании (4.2.89) получаем

$$\frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(a,\tau) \ge \frac{\gamma}{N}\,\sum_{i=1}^{N} \lambda_n(\sigma_i(a,\tau)) \ge \gamma\,\lambda_n(\Sigma(a,\tau), N).$$

□

Если $\Sigma(a,t)$ является стандартной сферой $S^{n-1}(a,t) \subset \mathbb{R}^n$, то

$$\lambda_n(S^{n-1}(a,t), N) = \frac{1}{t}\,\lambda_n(S^{n-1}(a,1), N). \qquad (4.2.92)$$

Нам потребуется специальный случай для $p = n$ леммы 4.1.2.

Лемма 4.2.3 *Имеют место высказывания*
i) если $n = 2$, то

$$\lambda_2(S^1(0,1), N) = \frac{N}{\pi},$$

ii) если $n \ge 3$, то

$$\lambda_n(S^{n-1}(0,1), N) \ge \lambda_n\, N^{1/(n-1)}$$

с некоторой постоянной λ_n, определенной соотношением (4.2.70).

4.2.9 Доказательство теоремы 4.2.5

Объединяя соотношения (4.2.84), (4.2.91) и (4.2.92), находим

$$\limsup_{t\to 0} \frac{m(a,t)}{t^\alpha} = \left(\frac{2}{r}\right)^\alpha\, \limsup_{t\to 0} m(a,t)\,\left(\frac{r}{2t}\right)^\alpha =$$

$$= \left(\frac{2}{r}\right)^{\alpha} \limsup_{t\to 0} m(a,t)\, \exp\{\frac{\gamma}{n\nu}\, \lambda_n(S^{n-1}(0,1),N) \int\limits_{2t}^{r} \frac{d\tau}{\tau}\} =$$

$$= \left(\frac{2}{r}\right)^{\alpha} \limsup_{t\to 0} m(a,t)\, \exp\{\frac{\gamma}{n\nu} \int\limits_{2t}^{r} \lambda_n(S^{n-1}(0,\tau),N)\, d\tau\} =$$

$$\leq \left(\frac{2}{r}\right)^{\alpha} \limsup_{t\to 0} m(a,t)\, \exp\{\frac{1}{n\nu\, N} \int\limits_{2t}^{r} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(a,\tau)\, d\tau\} < \infty.$$

Оценки (4.2.85), (4.2.86) для постоянной λ следуют из леммы 4.2.3. $\Box$

Доказательство теоремы 4.2.1. По определению множества $E(N_0)$ каждая из точек $a \in E(N_0)$ обладает свойством :*существуют* N_0 *различных компонент связности* $O_1, O_2, ..., O_{N_0}$ *множества* $B(a,r) \setminus \partial\, E_f, a \in \overline{O}_i$*, для которых*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{m_i(a,\varepsilon)}{m(a,\varepsilon)} = q_i > 0,\ i = 1,2,...,N_0. \tag{4.2.93}$$

Для произвольной точки $a \in E(N_0)$ полагаем

$$q(a) = \min\{q_1, q_2, \ldots, q_{N_0}\}\,.$$

Пусть, кроме того,

$$E(q,N_0) = \{a \in E(N_0) : q(a) \geq q\}.$$

Пусть $a \in E(q,N_0)$ – произвольная точка. Выбирая в (4.2.87) величину

$$r < d_0 = \min\{1, d(a,\partial D)\},\ d(a,\partial D) = \min\{d(a,x) : x \in \partial D\},$$

и применяя соотношения (4.2.91), (4.2.92), приходим к неравенству

$$\frac{m^n(a,t)}{t^{\gamma\lambda_n(S^{n-1}(0,1),N)/\nu}} \leq \frac{C_1(q)}{r^{\gamma\lambda_n(S^{n-1}(0,1),N)/\nu}} \int_{B(a,r)} |\nabla f|^n * \mathbb{1}\,.$$

Данное неравенство влечет

$$\frac{m^n(a,t)}{t^{n\alpha}} \leq C_1(q) \int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^n * \mathbb{1} \Big/ r^{\gamma\lambda(S^{n-1}(0,1),N)/\nu}|. \tag{4.2.94}$$

Неравенство (4.2.94) ведет к необходимому заключению. □

Для **доказательства** теоремы 4.2.1 нам будет необходимо следующее, хорошо известное утверждение о покрытии шарами (см. [86, раздел 1.1] и ссылки).

Лемма 4.2.4 *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *– не пусто и пусть*

$$\mathcal{F}_1 = \{B(x, r(x)) : x \in A\}$$

– покрытие множества A *шарами. Если* $\sup\{r(x) : x \in A\} < \infty$, *то найдется счетное подсемейство* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ *такое, что*

$$A \subset \cup_{\mathcal{F}_2} B(x, r(x))$$

и каждая из точек $x \in A$ *принадлежит не более чем* $c(n)$ *элементам семейства* $\mathcal{F}_2$.

Не умаляя общности мы можем предполагать, что область $D \subset \mathbb{R}^n$ ограничена. Фиксируем подобласть $D_1, \overline{D}_1 \subset D$, и положим

$$E = E(N_0) \cap D_1, \quad E_q = E \cap E(q, N_0).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что α/n-мерная мера Хаусдорфа множества $f(E_q)$ конечна. Выбирая последовательность $q_n = 1/n$ и исчерпывая область замкнутыми, ограниченными подобластями, приходим к необходимому заключению.

Зададим $\varepsilon > 0$ и $r < \min\{d_0, d(D_1, \partial D)\}$. Неравенство (4.2.94) влечет, что для любой точки $a \in E_q$ существует радиус $r(a) < r$ такой, что

$$m^{n/\alpha}(a, r(a)) \le c_2\, r(a)^n,$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от точки a. Заменив величину $r(a)$ меньшим числом, если это необходимо, мы вправе предполагать, что $m(a, r(a)) < \varepsilon$.

Применяя лемму 4.2.4, выберем счетное покрытие $\{B_s\}$ множества A шарами $B_s(a, r(a_s))$ со свойством, описанным в лемме 4.2.4. Семейство интервалов $\{f(B_s)\}$ в $\mathbb{R}$ покрывает множество $f(E_q)$ и, более того, для любого $s = 1, 2, ...$ выполняется: линейная мера $f(B_s) < \varepsilon$ и

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\mathrm{length} f(B_s))^{n/\alpha} \le C_2(q) \sum_{s=1}^{\infty} r^n(a_s)\,.$$

Так как кратность покрытия в лемме 4.2.4 ограничена, то мы получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\text{length } f(B_s))^{n/\alpha} \leq C_3(n,q) \operatorname{vol}(D_1).$$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно, а потому мы вправе сделать нужное заключение и доказательство теоремы 4.2.1 завершено. $\Box$

4.3 Уравнения типа минимальной поверхности

Ниже рассматриваются дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ на поверхности $F = (D, ds_F^2)$, заданной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$ линейным элементом ds_F^2. При определенных условиях на оператор $\mathcal{L}$, выражаемых в терминах метрики ds_F^2, и на поверхность F доказываются некоторые теоремы о решениях либо субрешениях дифференциального уравнения $\mathcal{L}[f] = 0$. Это — теорема Лиувилля, обобщенный принцип максимума и теорема о поведении решений в окрестности изолированной особой точки.

Варьируя выбор метрики ds_F^2 и пользуясь ранее доказанными результатами о граничных множествах поверхности F, в качестве следствий этих общих теорем мы получаем соответствующие высказывания как для равномерно эллиптических, так и для неравномерно эллиптических уравнений.

4.3.1 Классы $\mathcal{A}(\alpha)$

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и пусть $A_i(x, \xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – измеримые, локально ограниченные функции, определенные при всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, A_i(x, \xi) \geq 0 \,, \tag{4.3.1}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$\mathcal{L}[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \, A_i(x, \nabla f) \,. \tag{4.3.2}$$

Ниже речь пойдет о решениях неравенства $\mathcal{L}[f] \geq 0$, понимаемых в следующем смысле. Будем говорить, что функция $f(x)$ класса $\mathrm{Lip}\,(D)$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{L}[f(x)] \geq 0$, если для всякой неотрицательной функции $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_0(D)$ выполнено

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} A_i(x, \nabla f) \, dx \leq 0 \,. \tag{4.3.3}$$

В случае, когда функции $A_i(x,\xi)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и $f(x)$ являются достоточно гладкими, пользуясь формулой Остроградского – Гаусса легко заключаем, что

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} A_i(x,\nabla f)\,dx = -\int\limits_D \varphi\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\,A_i(x,\nabla f)\,dx\,.$$

Тем самым (4.3.3) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_D \varphi\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\,A_i(x,\nabla f)\,dx \geq 0\,,$$

выполнение которого с указанным произволом на функцию $\varphi\geq 0$, влечет за собой неравенство $\mathcal{L}\,[f(x)]\geq 0$, понимаемое в стандартном смысле.

Определенные таким образом решения неравенства $\mathcal{L}\,[f(x)]\geq 0$ мы будем называть также *субрешениями* уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)]=0$. Функция $f(x)$ есть *суперрешение* уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)]=0$, если функция $-f(x)$ является субрешением.

Далее предполагается, что $F=(D,ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью $D\subset\mathbb{R}^n$ линейным элементом (1.2.5). Для остальных величин, связанных с данной метрикой, мы также полностью сохраняем обозначения, принятые в разделе 1.2.2.

Пусть $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор, определенный соотношением (4.3.2). Будем говорить, что оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha)$, $1\leq\alpha<\infty$, в метрике поверхности F, если он удовлетворяет условию (4.3.1) и существует постоянная $q>0$ такая, что для почти всех $x\in D$ и всех ξ, $\eta\in\mathbb{R}^n$ выполнено

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\,A_i(x,\eta)\right)^{\alpha} \leq q\,\sqrt{g(x)}\,\mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\xi)\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\,A_i(x,\eta)\right)^{\alpha-1}\,. \tag{4.3.4}$$

Предложение 4.3.1 *В специальном случае $\alpha=2$ условия* (4.3.1) *и* (4.3.4) *принадлежности $\mathcal{L}$ к классу $\mathcal{A}(\alpha)$ в метрике ds_F могут быть записаны в виде одного неравенства*

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\,A_i(x,\xi)A_j(x,\xi)\leq q\,\sqrt{g(x)}\sum_{i=1}^n \xi_i\,A_i(x,\xi)\,. \tag{4.3.5}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться соотношением

$$\max_{|\eta|=1} \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \eta_i \eta_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} \eta_i \eta_j} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \xi_i \xi_j \,. \tag{4.3.6}$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.3.6) заметим сначала, что в силу известных свойств квадратичных форм (см., например, [30, стр. 289 – 290]), наибольшее значение отношения двух квадратичных форм, стоящих в левой части (4.3.6), равно максимальному из корней λ уравнения

$$\det\,(\xi_i \xi_j - \lambda\, g_{ij}) = 0 \,.$$

Умножая обе части данного равенства на $\det\,(g^{ij})$, получаем

$$\det\,(a_{ij} - \lambda\, \delta_{ij}) = 0 \,,$$

где

$$a_{ij} = \xi_j \sum_{s=1}^{n} g^{is} \xi_s$$

и δ_{ij} – символ Кронекера.

Запишем это уравнение в развернутой форме

$$(-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + S_{n-1}(-\lambda) + S_n = 0 \,,$$

где S_m – сумма главных миноров m-го порядка матрицы (a_{ij}).

Так как любые два столбца матрицы (a_{ij}) пропорциональны, то $S_m = 0$ при $m > 1$. Тем самым, мы получаем

$$\lambda_{\max} = S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \eta_i \eta_j \,,$$

что и требуется. $\square$

4.3.2 Теорема Лиувилля

Докажем следующую теорему типа теоремы Лиувилля.

Теорема 4.3.1 *Пусть f – ограниченное сверху решение неравенства $\mathcal{L}\,[f(x)] \geq 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, где оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha)$ в метрике ds_F. Если график F решения f имеет α-параболический тип в метрике ds_F, то $f \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Зафиксируем постоянную c и обозначим через $\mathcal{O}_c$ компоненту связности множества, на котором $f(x) > c$. Не ограничивая общности можно считать, что $\partial\mathcal{O} \neq \emptyset$.

Рассмотрим функцию $f_1(x)$, совпадающую с функцией $f(x)-c$ на множестве $\mathcal{O}_c$ и равную 0 при $x \in D\backslash\mathcal{O}_c$. Функция $f_1(x)$ есть функция класса $\mathrm{Lip}\,(D)$. Нетрудно доказать, что $f_1(x)$ также является субрешением уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$. На основании неравенства (4.3.3) для произвольной неотрицательной функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(D)$ имеем

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^n (\varphi^\alpha f_1)'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx \leq 0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_D \varphi^\alpha \sum_{i=1}^n f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx \leq -\alpha \int\limits_D \varphi^{\alpha-1} f_1 \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx\,.$$

Из условия (4.3.4) на оператор $\mathcal{L}$ вытекает, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\right)^\alpha \leq q\,\sqrt{g(x)}\,\mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla\varphi)\left(\sum_{i=1}^n f_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\right)^{\alpha-1},$$

а потому

$$\int\limits_{\mathcal{O}_c} \varphi^\alpha \sum_{i=1}^n f'_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \leq$$

$$\leq \tilde{c} \int\limits_{\mathcal{O}_c} \varphi^{\alpha-1} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(\nabla\varphi) g^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dx\,,$$

где $\tilde{c}$ – некоторая постоянная, зависящая только от α, q и верхней грани функции f_1 на D.

На основании неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\mathcal{O}_c} \varphi^{\alpha-1}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(\nabla\varphi)\, g^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i} A_i(x,\nabla f)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathcal{O}_c} \mathcal{E}_F^{\frac{\alpha}{2}}(\nabla\varphi)\sqrt{g}\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int\limits_{\mathcal{O}_c} \varphi^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} A_i(x,\nabla f)\, dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} .$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{O}_c} \varphi^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} A_i(x,\nabla f)\, dx \le \tilde{c}^{\alpha} \int\limits_{\mathcal{O}_c} \mathcal{E}_F^{\frac{\alpha}{2}}(\nabla\varphi)\sqrt{g}\, dx\,. \qquad (4.3.7)$$

Зададим произвольно исчерпание D последовательностью

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_m \subset \ldots\,, \quad \cup_{m=1}^{\infty} D_m = D\,,$$

ограниченных, строго внутренних подобластей $\overline{D}_m \subset D$. Пусть Δ, $\overline{\Delta} \subset D_1$, – некоторая область. Выбирая в (4.3.7) функцию φ равную 1 на Δ и обращающуюся в 0 на $D \setminus \overline{D}_m$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Delta\cap\mathcal{O}_c} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} A_i(x,\nabla f)\, dx \le \tilde{c}^{\alpha} \int\limits_{\mathcal{O}_c} \mathcal{E}_F^{\frac{\alpha}{2}}(\nabla\varphi)\, dF\,.$$

Минимизируя правую часть этого неравенства по всем функциям φ указанного вида, будем иметь

$$\int\limits_{\Delta\cap\mathcal{O}_c} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} A_i(x,\nabla f)\, dx \le \tilde{c}^{\alpha}\, \mathrm{cap}_{\alpha,F}(\overline{\Delta}, \overline{D \setminus D_m}; D)\,. \qquad (4.3.8)$$

В силу требования α-параболичности поверхности F, правая часть (4.3.8) стремится к 0 при $m \to \infty$. Таким образом, почти всюду на множестве $\Delta \cap \mathcal{O}_c$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} A_i(x,\nabla f) = 0\,.$$

Учитывая произвол в выборе подобласти Δ и свойство (4.3.1) оператора $\mathcal{L}$, заключаем, что почти всюду на $\mathcal{O}_c$ градиент функции f обращается в 0. Поэтому $f(x) \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{O}_c$, что противоречит непустоте множества $\partial\mathcal{O}_c$. Теорема доказана. □

Условие (4.3.4) не относится к числу традиционных условий на оператор в теории уравнений в частных производных. Приведем некоторые, иллюстрирующие его примеры. Рассмотрим сначала случай, в котором метрика $ds_F = |dx|$ евклидова.

Пусть $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор, определенный соотношением (4.3.2) и удовлетворяющий условиям (2.2.15), (2.2.16). Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha)$ с $\alpha = p > 1$ в евклидовой метрике. Вспоминая, что пространство $\mathbb{R}^n$ имеет α-параболический тип при $\alpha \geq n$, на основании теоремы 4.3.1 приходим к высказыванию.

Следствие 4.3.1 *Если $\alpha \geq n$, то всякое ограниченное сверху решение неравенства $\mathcal{L}\,[f(x)] \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$ описанного вида является тождественной постоянной $f(x) \equiv \mathrm{const}$.*

Пример 4.3.1 Приведем пример, показывающий, что условие $\alpha \geq n$ существенно. Положим

$$f_0(x) = \int\limits_1^{|x|} t^{\frac{1-n}{\alpha-1}}\, dt\,.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \max\{0, f_0(x)\}$. Легко видеть, что функция $f(x)$ есть субрешение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla f|^{\alpha-2}\nabla f) = 0\,.$$

При $1 < \alpha < n$ функция $f(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ и отлична от тождественной постоянной.

□

Рассмотрим другой, важный для дальнейшего случай, когда оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в евклидовой метрике. Условие (4.3.4) может быть записано здесь в виде (2.2.12) с $p = \alpha$. Данному условию удовлетворяет, в частности, оператор средней кривизны

$$\mathcal{L}\,[f] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)$$

и пользуясь 2-параболичностью типа $\mathbb{R}^2$, получаем

Следствие 4.3.2 *Пусть F – поверхность неотрицательной средней кривизны, заданная над $\mathbb{R}^2$ посредством дважды непрерывно дифференцируемой, ограниченной сверху функции $f(x)$. Тогда F – плоскость.*

4.3.3 Теорема Бернштейна

Более глубокие примеры применения теоремы 4.3.1 связаны с интерпретацией теоремы С.Н. Бернштейна [10, стр. 257] в качестве лиувиллевского типа для производных решения. Данная концепция восходит к основополагающей работе С.Н. Бернштейна [10]. Проиллюстрируем ее сперва на примере уравнения минимальной поверхности.

Пусть $x_3 = f(x_1, x_2)$ – произвольное целое решение уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0\,. \tag{4.3.9}$$

Дифференцируя обе части равенства (4.3.9) по переменной x_1, получаем

$$\mathcal{B}\,[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0\,,$$

где $u = \operatorname{arctg} f'_{x_1}$ и

$$a_{11} = \lambda(1 + f'^2_{x_2}) \quad a_{12} = a_{21} = -\lambda f'_{x_1} f'_{x_2}\,, \quad a_{22} = \lambda(1 + f'^2_{x_1})\,,$$

$$\lambda = \frac{1 + f'^2_{x_1}}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}}\,.$$

В силу теоремы 1.3.4 уравнение $x_3 = f(x_1, x_2)$ описывает поверхность F 2-параболического типа. С другой стороны, непосредственно проверяется, что определенный выше оператор $\mathcal{B}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике этой поверхности.

Чтобы убедиться в сказанном, воспользуемся предложением 4.3.1. Замечая, что в нашем случае коэффициенты g_{ij} метрики ds_F^2 имеют вид (1.3.34), будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)A_i(x,\xi)A_j(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\left(\sum_{p,q=1}^{2} a_{ip}a_{jq}\xi_p\xi_q\right) =$$

$$= \frac{(1+f'^2_{x_1})^2}{(1+|\nabla f|^2)^3}\left((1+f'^2_{x_2})\xi_1^2 - 2f'_{x_1}f'_{x_2}\xi_1\xi_2 + (1+f'^2_{x_1})\xi_2^2\right). \qquad (4.3.10)$$

Для сумм в правой части (4.3.6) имеем

$$\sum_{i=1}^{2}\xi_i A_i(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j =$$

$$= \frac{1+f'^2_{x_1}}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}}\left((1+f'^2_{x_2})\xi_1^2 - 2f'_{x_1}f'_{x_2}\xi_1\xi_2 + (1+f'^2_{x_1})\xi_2^2\right). \qquad (4.3.11)$$

Сопоставляя (4.3.10) и (4.3.11), видим, что неравенство (4.3.5) действительно справедливо (с постоянной $q = 1$). Функция $u(x) = \operatorname{arctg} f'_{x_1}$ ограничена и на основании теоремы 4.3.1 заключаем, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$ и $f'_{x_1} \equiv \mathrm{const}$.

Дифференцируя (4.3.9) по переменной x_2 и рассуждая, как и выше, заключаем, что $f'_{x_2} \equiv \mathrm{const}$. Тем самым приходим к утверждению

Теорема 4.3.2 *Всякое решение $x_3 = f(x_1, x_2)$ уравнения минимальной поверхности* (4.3.9), *определенное во всей плоскости* $\mathbb{R}^2$, *является линейной функцией.*

Замечание 4.3.1 *Теорема С.Н. Бернштейна, опубликованная впервые в 1915 году в 'Сообщ. Харьк. матем. об-ва', т. 15, п. 1, 38-45, находилась в центре математических интересов на протяжении всего XX-го века. В работах Флеминга, Де Джорджи, Альмгрена и Саймонса теорема*

С.Н. Бернштейна была обобщена на случай решений уравнения минимальной поверхности в $\mathbb{R}^n$, $n \leq 7$, *а в работе Бомбьери, Де Джорджи и Джусти [14] было показано, что утверждение неверно в размерностях* $n \geq 8$. *(Относительно весьма драматичной истории вопроса см., например, у Джусти [24, глава 17] и Саймона [102].)*

Приведенное выше доказательство не проходит уже при $n \geq 3$. *Тем не менее кажется весьма правдоподобным существование аналогов теоремы Бернштейна для минимальных графиков, заданных над некоторыми "угловыми" и "цилиндрическими" областями в* $\mathbb{R}^n$ *и имеющих специальные граничные данные.*

Ниже мы докажем другую версию теоремы С.Н. Бернштейна, утверждающую линейность целого решения уравнения типа минимальной поверхности по одной из переменных.

Для этой цели нам потребуется

Лемма 4.3.1 *Пусть* (a_{ij}) $(i,j=1,2)$ – *матрица с вещественными коэффициентами и пусть существует постоянная* $c > 1$ *такая, что*

$$4\,a_{11}a_{22} - (a_{12}+a_{21})^2 \geq \frac{c}{4}\,(a_{12}-a_{21})^2\,. \tag{4.3.12}$$

Тогда при любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}^2$ *выполняется*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\eta_j\right)^2 \leq \left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\xi_j\right)\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\eta_i\eta_j\right). \tag{4.3.13}$$

Доказательство. Положим

$$A(\xi,\eta) = \sum_{ij=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\eta_j\,, \quad B(\xi,\eta) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1\,,$$

$$\tilde{A}(\xi,\eta) = \xi_1\left(a_{11}\,\eta_1 + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\eta_2\right) + \xi_2\left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\eta_1 + a_{22}\,\eta_2\right).$$

Воспользуемся следующим, легко проверяемым тождеством

$$A^2(\xi,\eta) = A(\xi,\xi)\,A(\eta,\eta) - \left(a_{11}\,a_{22} - \left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)^2\right) B^2(\xi,\eta) +$$

$$+\frac{a_{12}-a_{21}}{2}A(\xi,\eta)\,B(\xi,\eta)+\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\tilde{A}(\xi,\eta)\,B(\xi,\eta)\,. \tag{4.3.14}$$

Билинейная форма $\tilde{A}(\xi,\eta)$ имеет симметрическую матрицу коэффициентов. Поэтому из условия (4.3.12) следует, что

$$\tilde{A}^2(\xi,\eta)\le A(\xi,\xi)\,A(\eta,\eta)\,. \tag{4.3.15}$$

Воспользуется неравенством Коши

$$ab\le\frac{\varepsilon^2}{2}\,a^2+\frac{1}{2\,\varepsilon^2}\,b^2\,,\qquad \varepsilon>0\,.$$

Для произвольных $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ можно записать

$$\frac{a_{12}-a_{21}}{2}A(\xi,\eta)\,B(\xi,\eta)\le\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\right)^2B^2(\xi,\eta)+\frac{\varepsilon^2}{2}A^2(\xi,\eta) \tag{4.3.16}$$

и

$$\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\tilde{A}(\xi,\eta)B(\xi,\eta)\le\frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\right)^2B^2(\xi,\eta)+\frac{\delta^2}{2}\tilde{A}^2(\xi,\eta)\,. \tag{4.3.17}$$

Объединяя соотношения (4.3.14) – (4.3.17), получаем

$$\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)A^2(\xi,\eta)\le\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right)A(\xi,\xi)\,A(\eta,\eta)-$$

$$-B^2(\xi,\eta)\left(a_{11}a_{22}-\left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\delta^2}\right)\left(\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\right)^2\right)\,.$$

Выбирая теперь

$$\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{c+1}}\,,\quad \delta=\frac{2}{\sqrt{c-1}}$$

и учитывая (4.3.12), приходим к неравенству (4.3.13). Лемма доказана. □

Укажем класс уравнений, всякое целое решение которых линейно по одной из переменных.

Пусть $A_i(x_1,\xi)$ $(i=1,2)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1\in\mathbb{R}^1$ и $\xi\in\mathbb{R}^2$. Пусть $a_{ij}=\partial A_i/\partial\xi_j$ $(i,j=1,2)$.

Предположим, что матрица (a_{ij}) удовлетворяет неравенству (4.3.12) при любых $x_1 \in \mathbb{R}^1$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$ с некоторой абсолютной постоянной $c > 1$. Предположим также, что существуют непрерывная, суммируемая по $\mathbb{R}^1$ функция $\theta(t) > 0$ и постоянная $q > 0$ такие, что при всех $x_1 \in \mathbb{R}^1$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$(1+\xi_1^2)\, a_{11} + \xi_1\xi_2\,(a_{12}+a_{21}) + (1+\xi_2^2)\, a_{22} \le q\, \theta(\xi_2)\, \sqrt{1+|\xi|^2}\,. \quad (4.3.18)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}\,[f(x)] = \sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dx_i} A_i(x_1, \nabla f) = 0\,. \quad (4.3.19)$$

Имеет место

Теорема 4.3.3 *Если оператор* $\mathcal{L}$ *удовлетворяет предположениям* (2.2.15), (2.2.16) *с* $p = 2$ *и* (4.3.18), *то всякое целое, трижды непрерывно дифференцируемое решение* $x_3 = f(x_1, x_2)$ *уравнения* (4.3.19) *является функцией, линейной по переменной* x_2.

Пример 4.3.2 Приведем пример, показывающий, что *описываемая теоремой ситуация реализуется нетривиальным образом.* Зададим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $q(\tau) : \mathbb{R} \to [1, 2]$, $q(0) = 1$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q(x_1)\, \frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0\,.$$

Данное уравнение удовлетворяет всем предположениям теоремы 4.3.3, а функция

$$f_0(x_1, x_2) = c_1 \int_0^{x_1} \frac{d\tau}{\sqrt{q^2(\tau) - c_2^2}} + c\, x_2\,,$$

где c – произвольная постоянная и

$$c_1 = \sqrt{\frac{1+c^2}{2+c^2}}\,, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2+c^2}}\,,$$

является его решением.

Функция $f_0(x_1, x_2)$ определена во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, линейна по переменной x_2 и, при $q(\tau) \not\equiv \mathrm{const}$, нелинейна по x_1.

$\square$

Доказательство теоремы 4.3.3. Продифференцируем обе части равенства (4.3.19) по переменной x_2. Имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dx_i} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j}(x_1, \nabla f) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2} \right) = 0 \,.$$

Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{f'_{x_2}(x)} \theta(\tau)\, d\tau \,. \tag{4.3.20}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_2} = \frac{1}{\theta(f'_{x_2})} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,,$$

приходим к соотношению

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{d}{dx_i} \left(\frac{1}{\theta(f'_{x_2})} a_{ij}(x_1, \nabla f)\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \,.$$

Данное соотношение будем рассматривать в качестве уравнения относительно функции $u(x)$. Полагая

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \frac{1}{\theta(f'_{x_2})} a_{ij}(x_1, \nabla f) \qquad (i, j = 1, 2) \,,$$

будем иметь

$$\mathcal{L}\,[u(x)] = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \,. \tag{4.3.21}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике поверхности, описываемой уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. Действительно, условие

(4.3.12) на коэффициенты матрицы (a_{ij}) влечет за собой аналогичное неравенство (а, следовательно, и неравенство (4.3.13)) для матрицы $(\tilde{a}_{ij})$. Таким образом, для любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\xi_i\eta_j\right)^2 \le \left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 \left(\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\right) \left(\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\eta_i\eta_j\right) . \tag{4.3.22}$$

Далее заметим, что из (4.3.12) и (4.3.18) следует неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}\,\xi_i\xi_j \le q\,\sqrt{g(x)}\,\sum_{ij=1}^{2} g^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\,, \tag{4.3.23}$$

где g^{ij} – элементы матрицы $(g_{ij})^{-1}$.

Чтобы убедиться в справедливости (4.3.23), найдем максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ регулярного пучка квадратичных форм

$$\sum_{ij}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j - \lambda \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\,.$$

Величина $\lambda_{\max}$ есть наибольший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} - \lambda\, g^{11} & (\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{21})/2 - \lambda\, g^{12} \\ (\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{21})/2 - \lambda\, g^{21} & \tilde{a}_{22} - \lambda\, g^{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Поэтому, в силу условия (4.3.12), будем иметь

$$\lambda_{\max} \le g\,\left(g^{11}\tilde{a}_{22} - g^{12}\,(\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{21}) + g^{22}\,\tilde{a}_{11}\right)$$

и, замечая, что

$$g^{11} = \frac{1+f'^2_{x_2}}{1+|\nabla f|^2}\,, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{f'_{x_1}\,f'_{x_2}}{1+|\nabla f|^2}\,, \quad g^{22} = \frac{1+f'^2_{x_1}}{1+|\nabla f|^2}\,,$$

получаем

$$\lambda_{\max} \le \frac{1}{\theta(f'_{x_2})}\left((1+f'^2_{x_1})\,a_{11} + f'_{x_1}\,f'_{x_2}\,(a_{12}+a_{21}) + (1+f'^2_{x_2})\,a_{22}\right)\,.$$

Пользуясь теперь условием (4.3.18), приходим к (4.3.23).

Подставляя (4.3.23) в (4.3.22), будем иметь

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}\,\xi_i\eta_j\right)^2 \le q\,\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 \sqrt{g}\,\mathcal{E}_F(\xi)\,\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\eta_i\eta_j\,, \tag{4.3.24}$$

что эквивалентно неравенству (4.3.5) для оператора (4.3.21).

Действительно, из (4.3.24) следует, что максимальное собственное значение $\lambda'_{\max}$ пучка квадратичных форм

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left(\sum_{p,q=1}^{2} \tilde{a}_{ip}\tilde{a}_{jq}\,\eta_p\eta_q\right)\xi_i\xi_j - \lambda\sum_{ij} g^{ij}\,\xi_i\xi_j$$

удовлетворяет неравенству

$$\lambda'_{\max} \le q\,\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 \sqrt{g}\,\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(x)\,\eta_i\eta_j \tag{4.3.25}$$

(см. доказательство предложения 4.3.1).

Найдем $\lambda'_{\max}$. Положим

$$A_{ij} = \sum_{p,q=1}^{2} \tilde{a}_{jq}\tilde{a}_{ip}\,\eta_p\eta_q \quad (i,j=1,2)\,.$$

Тогда, как и выше, имеем

$$\lambda'_{\max} = g\,\left(A_{11}\,g^{22} - 2\,A_{12}\,g^{12} + A_{22}\,g^{11}\right)\,.$$

Замечая, что

$$g^{11} = \frac{1+f'^2_{x_2}}{g} = -\frac{g_{22}}{g}\,,\quad g^{12} = -\frac{f'_{x_1}f'_{x_2}}{g} = -\frac{g_{12}}{g}\,,$$

$$g^{22} = \frac{1+f'^2_{x_1}}{g} = \frac{g_{11}}{g}\,, \tag{4.3.26}$$

приходим к соотношению

$$\lambda'_{\max} = A_{11}\,g_{11} + 2A_{12}\,g_{12} + A_{22}\,g_{22} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \sum_{p,q=1}^{2} \tilde{a}_{jq}\tilde{a}_{ip}\,\eta_p\eta_q\,.$$

Таким образом, из (4.3.25) вытекает

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \sum_{p,q=1}^{2} \tilde{a}_{jq}\tilde{a}_{ip}\,\eta_p\eta_q \le q\,\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 \sqrt{g}\,\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}\,\eta_i\eta_j\,,$$

что доказывает (4.3.5).

Оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике поверхности F, описываемой уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. В силу теоремы 1.3.4, данная поверхность имеет 2-параболический тип. Замечая теперь, что из условия суммируемости $\theta(\tau)$ по $\mathbb{R}^1$ следует ограниченность функции $u(x)$ (определенной соотношением (4.3.20)), можем заключить, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$. Тем самым $f'_{x_2} \equiv \mathrm{const}$ и теорема доказана. □

4.3.4 Обобщенный принцип максимума

В разделе приводится обобщенный принцип максимума для разности решений и для производных решения уравнения типа минимальной поверхности в ”узких” на бесконечности областях $\mathbb{R}^n$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью D линейным элементом ds_F^2. Пусть $\{U_m\}$ – произвольная цепь открытых множеств на поверхности F.

Теорема 4.3.4 *Пусть $f(x)$ – ограниченное сверху в области D субрешение уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$, где оператор $\mathcal{L}$ определен соотношением (4.3.2) и принадлежит классу $\mathcal{A}(\alpha)$ в метрике поверхности F. Предположим, что*

$$\limsup f(x_N) \le c \quad (c \equiv \mathrm{const}) \tag{4.3.27}$$

вдоль любой расходящейся последовательности точек $\{x_N\}$, лежащей вне некоторой, наперед заданной, цепи $\{U_m\}$ α-емкости нуль в метрике поверхности F.

Тогда $f(x) \le c$ всюду в D.

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in D$ выполнено $f(x_0) > c$. Обозначим через $\mathcal{O}$ произвольную компоненту связности множества, на котором $f(x) > c_1$, где $c < c_1 < f(x_0)$. Положим

$\tilde{f}(x) = f(x) - c_1$ при $x \in \mathcal{O}$ и $\tilde{f}(x) = 0$ при $x \in D \setminus \mathcal{O}$. Ясно, что $\tilde{f}(x) \in \mathrm{Lip}\,(D)$ и является решением неравенства $\mathcal{L}\,[\tilde{f}(x)] \geq 0$ в D.

Зададим ограниченную подобласть Δ, $\overline{\Delta} \subset \mathcal{O}$. Если $m = 1, 2, \ldots$ достаточно велико, то $\overline{U}_m \cap \overline{\Delta} = \emptyset$. Не умаляя общности можем считать, что данное свойство выполнено при всех $m = 1, 2, \ldots$. Тогда имеем

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{cap}_{\alpha,F}(\overline{\Delta}, \overline{U}_m;\, D) = 0\,. \tag{4.3.28}$$

Выберем произвольно функцию $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\,(D)$, обращающуюся в 1 на Δ и равную 0 на U_m. В силу условия (4.3.27) функция $\varphi^\alpha(x)\,\tilde{f}(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}_0(D)$. Поэтому из (4.3.3) имеем

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^n (\varphi^\alpha \tilde{f})'_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\, dx \leq 0\,.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \varphi^\alpha \sum_{i=1}^n f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx \leq \alpha \int\limits_{\mathcal{O}} \tilde{f} \varphi^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx \leq$$

$$\leq M \int\limits_{\mathcal{O}} \varphi^{\alpha-1} \left| \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f) \right| dx\,,$$

где M – постоянная, зависящая от верхней грани $\tilde{f}(x)$ на D.

Рассуждая как при доказательстве теоремы 4.3.1, будем иметь

$$\int\limits_\Delta \sum_{i=1}^n f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx \leq M_1\, \mathrm{cap}_{\alpha,F}(\overline{\Delta}, \overline{U}_m;\, D)\,,$$

где M_1 – постоянная, не зависящая от m.

Полагая $m \to \infty$ и пользуясь соотношением (4.3.28), находим

$$\int\limits_\Delta \sum_{i=1}^n f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, dx = 0\,.$$

Тем самым из (4.3.1) вытекает, что $|\nabla f(x)| = 0$ почти всюду на Δ а, следовательно, и всюду на $\mathcal{O}$. Отсюда $f(x) \equiv c_1$, что противоречит определению множества $\mathcal{O}$. Теорема доказана. $\square$

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и E – компактное множество на границе ∂D. Зафиксируем постоянную $\alpha \in (1, n]$ и обозначим через $h(r)$ функцию, равную $r^{n-\alpha}$ при $1 < \alpha < n$ и равную $(\ln 1/r)^{1-n}$ при $\alpha = n$. Предположим, что h-мера Хаусдорфа множества E равна 0.

Из теоремы 4.3.4 и соотношения (4.3.6) следует

Следствие 4.3.3 *Пусть $f(x)$ – ограниченное сверху в D субрешение уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$, где оператор $\mathcal{L}$ соотношением* (4.3.2) *и удовлетворяет условиям* (1.3.1), (1.3.2) *с показателем $\alpha > 1$. Предположим, что для любой точки $x_0 \in \partial D \setminus E$ выполнено*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \le c \qquad (c \equiv \text{const})\,.$$

Тогда $f(x) \le c$ всюду в D.

Упражнение. *В приведенном высказывании речь идет о решениях неравенства $\mathcal{L}\,[f(x)] \ge 0$, принадлежащих классу* $\mathrm{Lip}(D)$. *Показать, что утверждение остается в силе, если (для операторов $\mathcal{L}$, описанных в формулировке следствия 4.3.3) расширить понятие решения неравенства $\mathcal{L}\,[f(x)] \ge 0$, допуская непрерывные функции класса $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(D)$.*

Наиболее интересные применения теоремы 4.3.4 связаны с уравнением минимальных поверхностей

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0\,. \tag{4.3.29}$$

Остановимся сначала на одном простом примере. Пусть $ds_F^2 = |dx|^2$ и пусть $f(x)$ – субрешение уравнения (4.3.29). Ведем вспомогательную функцию $u(x) = \mathrm{arctg} f(x)$. Функция $u(x)$ является субрешением уравнения

$$\mathcal{L}\,[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q(x) u'_{x_i}}{\sqrt{1 + q^2(x)\, |\nabla u|^2}} \right) = 0\,,$$

где $q(x) = 1 + f^2(x)$.

Оператор $\mathcal{L}$ принадлежит здесь классу $\mathcal{A}(1)$ в евклидовой метрике, функция $u(x)$ ограничена, и мы можем воспользоваться теоремой 4.3.4. Исключительными граничными множествами являются здесь множества 1-емкости нуль в евклидовой метрике. Поэтому на основании леммы 1.1.2 приходим к высказыванию

Следствие 4.3.4 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область и $E \subset \partial D$ – замкнутое множество нулевой $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. Пусть $f(x)$ – субрешение уравнения минимальной поверхности* (4.3.29), *непрерывное в $\overline{D} \setminus E$ и удовлетворяющее условию $f(x) \le c$ при $x \in \partial D \setminus E$.*

Тогда $f(x) \le c$ всюду в D.

Похожим приемом устанавливается и аналогичное утверждение для разности решений уравнения минимальных поверхностей, принадлежащее Е. Де-Джорджи, Г. Стампаккья [146] и И.С.С. Ниче [219].

Теорема 4.3.5 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область и $E \subset \partial D$ – замкнутое множество нулевой $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. Пусть $f_1(x)$ – субрешение, а $f_2(x)$ – суперрешение уравнения минимальной поверхности* (4.3.29), *непрерывные в $\overline{D} \setminus E$ и удовлетворяющие условию $f_1(x) - f_2(x) \le c$ при $x \in \partial D \setminus E$.*

Тогда $f_1(x) - f_2(x) \le c$ всюду в D.

Для **доказательства** положим

$$q(x) = 1 + (f_1(x) - f_2(x))^2 .$$

Рассмотрим функции

$$A_i(x,\xi) = \frac{f_{1x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_1|^2}} - \frac{f_{2x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_2|^2}} - \frac{(f_1-f_2)_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla(f_1-f_2)|^2}} + \frac{q(x)\,\xi_i}{\sqrt{1+q^2|\xi|^2}}$$

при $\xi_i = \frac{1}{q(x)}(f_1 - f_2)_{x_i}$ и

$$A_i(x,\xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$$

при $\xi_i \neq \frac{1}{q(x)}(f_1 - f_2)_{x_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Определим оператор $\mathcal{L}$ соотношением

$$\mathcal{L}\,[u(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, A_i(x, \nabla u)\,.$$

Функция $u(x) = \operatorname{arctg}(f_1(x) - f_2(x))$ является субрешением уравнения $\mathcal{L}[u(x)] = 0$.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения, достаточно проверить, что оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(1)$ в евклидовой метрике.

Условие (4.3.4) при $\alpha = 1$ есть следствие неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, A_i(x, \eta) \right| \leq |\xi|\ |A(x, \eta)|$$

и ограниченности функций $A_i(x, \xi)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Выполнение требования (4.3.1) для оператора $\mathcal{L}$ очевидно при $\xi \neq \nabla(f_1 - f_2)/\, q(x)$. При $\xi = \nabla(f_1 - f_2)/\, q(x)$ оно вытекает из следующего утверждения

Лемма 4.3.2 *При любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \eta$, справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} - \frac{\eta_i}{\sqrt{1 + |\eta|^2}} \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) \left(\frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} - \frac{\eta_i}{\sqrt{1 + |\eta|^2}} \right)\,. \qquad (4.3.30)$$

Доказательство. Положим

$$p_{1i} = \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}\,, \quad p_{2i} = \frac{\eta_i}{\sqrt{1 + |\eta|^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

$$\omega_i = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2}$$

и

$$p_k = p_{2k} + t\,(p_{1k} - p_{2k})\,, \quad \omega = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n} p_k^2}\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\delta(t) = \sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})\,\frac{p_k}{\omega}\,.$$

Так как

$$\delta(0) = \sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})\,\frac{p_{2k}}{\omega_2}\,, \quad \delta(1) = \sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})\,\frac{p_{1k}}{\omega_1}\,,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})\,\left(\frac{p_{1k}}{\omega_1} - \frac{p_{2k}}{\omega_2}\right) = \int\limits_0^1 \delta'(t)\,dt =$$

$$\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left[(p_{1k} - p_{2k})^2 (1 - \sum_{j=1}^{n} p_k^2) + \sum_{j=1}^{n} p_k p_j (p_{1j} - p_{2j})(p_{1k} - p_{2k})\right] \frac{dt}{\omega^3} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})^2\,(1 - \sum_{j=1}^{n} p_j^2) + \left(\sum_{j=1}^{n} p_j (p_{1j} - p_{2j}) \right)^2 \right\} \frac{dt}{\omega^3}\,.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k}) \left(\frac{p_{1k}}{\omega_1} - \frac{p_{2k}}{\omega_2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} (p_{1k} - p_{2k})^2 \int\limits_0^1 \frac{dt}{\omega}$$

и, замечая, что $\omega < 1$, приходим к (4.3.30). □

Следующее утверждение также связано с разностью решений уравнения минимальных поверхностей.

Теорема 4.3.6 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, удовлетворяющая условию*

$$\int^{\infty} \frac{dt}{\mathcal{H}^{n-1}(D \cap S(0,t))} = \infty\,. \tag{4.3.31}$$

Пусть $f_1(x)$ – субрешение, а $f_2(x)$ – суперрешение уравнения минимальной поверхности (4.3.29). Предположим, что разность $f_1(x) - f_2(x)$ ограничена сверху в D и

$$\limsup_{x \to x_0} (f_1(x) - f_2(x)) \le c \quad \text{при всех} \quad x_0 \in \partial D\,. \tag{4.3.32}$$

Тогда $f_1(x) - f_2(x) \le c$ всюду в D.

Доказательство. Так как $f_1(x)$ есть субрешение, а $f_2(x)$ – суперрешение уравнения (4.3.29), то

$$\mathcal{L}[f_1 - f_2] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{1x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_1|^2}} - \frac{f'_{2x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_2|^2}} \right) \ge 0$$

(в слабом смысле).

Данному неравенству можно придать точное содержание, если положить

$$A_i(x,\xi) = \frac{f'_{1x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_1|^2}} - \frac{f'_{2x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f_2|^2}} - (f_1 - f_2)'_{x_i} + \xi_i$$

при $\xi_i = (f_1 - f_2)'_{x_i}$ и $A_i(x,\xi) = \xi_i$ при $\xi_i \neq (f_1 - f_2)'_{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и определить оператор $\mathcal{L}$ соотношением

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla u)\,.$$

Функции $A_i(x,\xi)$ определены при всех $x \in D$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ и измеримы. Разность $f_1(x) - f_2(x)$ является ограниченным сверху субрешением уравнения $\mathcal{L}\,[u(x)] = 0$. Пользуясь леммой 4.3.2, заключаем о принадлежности оператора $\mathcal{L}$ классу $\mathcal{A}(2)$.

Предположение (4.3.31) влечет выполнение условия (1.2.1) при $k(x) \equiv 1$, $p = 2$ и $h(x) = |x|$. Тем самым, граничное множество области D, описываемое цепью подмножеств $\{U_m\}$,

$$U_m = \{x \in D : |x| > m\} \quad (m = 1, 2, \ldots)\,,$$

имеет 2-параболический тип.

На основании теоремы 4.3.4 приходим к нужному заключению и теорема доказана. $\square$

Следствие 4.3.5 *Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию* (4.3.31). *Предположим, что разность $f_1(x) - f_2(x)$ решений уравнения минимальной поверхности* (4.3.29) *ограничена в D и*

$$\limsup_{x \to x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = 0 \quad \text{при всех } x_0 \in \partial D\,.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ всюду в D.

Замечание 4.3.2 В двумерном случае условие (4.3.31) выполняется для любой неограниченной области и последнее утверждение дает (в определенном смысле) полное решение вопроса о единственности решения задачи Дирихле для уравнения минимальной поверхности в неограниченных областях. Данная задача была поставлена И.С.С. Ниче [92, стр. 89]. Для внешности круга в $\mathbb{R}^2$ аналогичный результат содержится в [93] и, как там отмечается, принадлежит Р. Финну.

В общем случае данное утверждение получено В.М. Миклюковым [78] и впоследствии неоднократно передоказывалось (см. [178], [179], [140], [224]).

В многомерном случае вопрос о единственности решений задачи Дирихле для уравнения (4.3.29) в неограниченных областях, не удовлетворяющих предположению (4.3.31), остается открытым.

Отметим вопрос, касающийся также и двумерного случая. *Если область $D \subset \mathbb{R}^2$ лежит в угле раствора меньше π и решение $f(x)$ уравнения (4.3.29) ограничено вблизи ∂D, то $f(x)$ ограничено во всей области D. Для каких еще областей верно данное утверждение, не ясно.*

Другие применения теоремы 4.3.4 будут связаны с использованием метрик, отличных от евклидовой. Пусть $A_i(\xi)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$. Положим $a_{ij} = \partial A_i / \partial \xi_j$ $(i,\, j = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $a_{ij} = a_{ji}$ и $\det(a_{ij}) > 0$ при всех

$\xi \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\theta(\tau)$, суммируемая по $\mathbb{R}^1$, обладающая свойствами

$$\theta(\tau) > 0\,, \quad \theta(-\tau) = \theta(\tau)\,, \quad \theta'(\tau) \le 0 \quad \forall \tau \ge 0\,,$$

и такая, что при любых ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi)\,\eta_i\eta_j \le q\,\theta(|\xi|)\,\sqrt{1+|\xi|^2}\,\sum_{ij=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{1+|\xi|^2}\right)\eta_i\eta_j\,, \qquad (4.3.33)$$

где $0 < q < \infty$ – постоянная.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}\,[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\,A_i(\nabla f) = 0 \qquad (4.3.34)$$

и предположим, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям (1.3.1), (1.3.2) с некоторыми постоянными ν_1 и ν_2.

Теорема 4.3.7 *Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию* (1.3.24). *Пусть $f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (4.3.34) *в области D. Предположим, что для производной $f'_{x_k}(x)$ выполнено*

$$\limsup_{x\to x_0} f'_{x_k}(x) \le c \quad \text{при всех} \quad x_0 \in \partial D\,. \qquad (4.3.35)$$

Тогда $f'_{x_k}(x) \le c$ всюду в D.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $k = 1$. Дифференцируя (4.3.34) по переменной x_1, приходим к соотношению

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\nabla f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_j}\right) = 0\,.$$

Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{f'_{x_1}(x)} \theta(\tau)\,d\tau\,. \qquad (4.3.36)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{1}{\theta(f'_{x_1})} \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

и мы получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\theta(f'_{x_1})} a_{ij}(\nabla f) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Данное соотношение будем рассматривать как уравнение относительно функции $u(x)$. С этой целью положим

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \frac{1}{\theta(f'_{x_1})} a_{ij}(\nabla f).$$

Тогда имеем

$$\mathcal{L}[u(x)] \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{4.3.37}$$

Пусть F – поверхность, заданная над областью D уравнением $x_{n+1} = f(x)$. Пользуясь теоремой 4.3.4 и учитывая условие, наложенное на область D, мы можем заключить, что цепь $\{U_m\}$, $U_m = \{x \in D : |x| > m\}$, имеет 2-емкость 0 в метрике ds_F.

Так как функция $\theta(\tau)$ суммируема по $\mathbb{R}^1$, то из (4.3.36) следует, что функция $u(x)$ ограничена в D. Требование (4.3.35) для производной $f'_{x_1}(x)$ влечет выполнение свойства

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \le \int_{-\infty} \theta(\tau)\, d\tau \quad \text{при всех} \quad x_0 \in \partial D.$$

Если мы покажем, что оператор $\mathcal{L}$, определенный соотношением (4.3.37), удовлетворяет условияю (4.3.5) в метрике поверхности F, то на основании теоремы 4.3.4 мы сможем заключить, что

$$u(x) \le \int_{-\infty} \theta(\tau)\, d\tau$$

при всех $x \in D$. Тем самым будет показано, что $f'_{x_1} \le c$ всюду в области D.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение неравенства (4.3.5) для оператора $\mathcal{L}$, т.е. нам достаточно доказать существование постоянной $0 < \tilde{q} < \infty$ такой, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \sum_{p,q=1}^{n} g_{pq} \tilde{a}_{pi} \tilde{a}_{qj} \le \tilde{q} \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \, \xi_i \xi_j \,. \tag{4.3.38}$$

Обозначим через $\tilde{a}$ матрицу с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}$, через G – матрицу с коэффициентами g_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Так как определитель матрицы (a_{ij}) отличен от нуля, то это же свойство имеет место и для матрицы $\tilde{a}$.

Легко видеть, что матрица коэффициентов квадратичной формы, стоящей в левой части (4.3.38), имеет вид $\tilde{a}^T \, G \, \tilde{a}$. Определим максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ регулярного пучка квадратичных форм

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{p,q=1}^{n} g_{pq} \tilde{a}_{pi} \, \tilde{a}_{qj} \right) \xi_i \xi_j - \lambda \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \, \xi_i \xi_j \,.$$

В силу известных свойств квадратичных форм, величина $\lambda_{\max}$ есть наибольший из корней уравнения

$$\det \left(\tilde{a} G \tilde{a} - \lambda \sqrt{g} \, \tilde{a} \right) = 0 \,.$$

Поскольку матрица $G \, \tilde{a}$ невырождена, данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\det \left(\tilde{a} - \lambda \sqrt{g} \, G^{-1} \right) = 0 \,.$$

Отсюда

$$\lambda_{\max} = \max_{\xi} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla f) \, \xi_i \xi_j}{\theta(f'_{x_1}) \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - f'_{x_i} f'_{x_j} \Big/ (1 + |\nabla f|^2) \right) \xi_i \xi_j} \,.$$

Функция $\theta(\tau)$ монотонно убывает с ростом $|\tau|$, и потому

$$\theta(f'_{x_1}) \ge \theta(|\nabla f|) \,.$$

Тем самым мы получаем

$$\lambda_{\max} \le \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\nabla f) \, \xi_i \xi_j}{\theta(|\nabla f|) \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - f'_{x_i} f'_{x_j} \Big/ (1 + |\nabla f|^2) \right) \xi_i \xi_j} \le q \,,$$

где q – постоянная из неравенства (4.3.33), что доказывает (4.3.38) и теорему. □

В случае минимальных поверхностей имеем

Следствие 4.3.6 *Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию* (1.3.24). *Если $f(x)$ – решение уравнения минимальных поверхностей* (4.3.29) *в D и производная f'_{x_k} удовлетворяет* (4.3.35) *на границе ∂D, то всюду в D выполнено $f'_{x_k}(x) \le c$.*

Доказательство. Достаточно проверить справедливость неравенства (4.3.33). Имеем

$$A_i(\xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$$

и

$$a_{ij}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{1+|\xi|^2}\right) \quad (i,j = 1,\ldots,n)\,.$$

Отсюда находим

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi)\,\eta_i\eta_j = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{1+|\xi|^2}\right)\eta_i\eta_j\,,$$

и неравенство (4.3.33) действительно имеет место для функции $\theta(\tau) = (1+\tau^2)^{-1}$ с постоянной $q = 1$. □

Замечание 4.3.3 Следует подчеркнуть, что в условиях теоремы 4.3.7 и следствия 4.3.6 не предполагается априорная ограниченность производной f'_{x_k} в области D. Этот эффект есть проявление специфики уравнения минимальных поверхностей и ему аналогичных.

Для самих решений уравнения минимальной поверхности подобное свойство, вообще говоря, не имеет места. Простейший пример такого рода дает линейная функция $x_3 = c\,x_1$, заданная над полуплоскостью $x_1 > 0$ из $\mathbb{R}^2$. Заметим, однако, что такое свойство все же может иметь место и для самих решений $x_3 = f(x_1, x_2)$, но при условии, что решение определено над неограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, достаточно "узкой" в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^2$ (см. В.М. Миклюков [84, глава 9]).

В случае $n = 2$ теорема 4.3.7 при несколько более жестких ограничениях была опубликована в [71], при $n > 2$ — в [78].

Условия (1.3.1), (1.3.2) и (4.3.33), накладываемые на уравнение (4.3.34), восходят к Р. Финну [152], описавшему уравнения, решения которых имеют графики с квазиконформным гауссовым отображением. Неравенство (4.3.33) представляет собой многомерный аналог условия принадлежности уравнения классу $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ Р. Финна [152], неравенства (1.3.1) и (1.3.2) являются усиленными вариантами условий принадлежности классам $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ и $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ из работы [152].

Доказательство описанных результатов при более слабых ограничениях на уравнения и на неограниченные области, в которых они заданы, представляет, на наш взгдяд, весьма важную и интересную проблему.

Наконец, еще одно из приложений теоремы 4.3.4 мы свяжем с уравнением максимальных поверхностей в пространстве Минковского

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) = 0\,. \tag{4.3.39}$$

При этом предполагается, что $|\nabla f| < 1$ всюду в области определения решения $f(x)$. Детали см. в [46, раздел 1.5.3].

Уравнение (4.3.39) есть частный случай рассмотренного выше уравнения (1.3.39) при равенстве нулю средней кривизны H.

Теорема 4.3.8 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – неограниченная односвязная область, удовлетворяющая условию* (1.3.31)*, и пусть $f(x)$ – ограниченное сверху решение уравнения* (4.3.39) *класса $C^2(D)$. Если для всех $x_0 \in \partial D$ выполнено*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \le c\,, \quad c = \mathrm{const}\,,$$

то $f(x) \le c$ всюду в D.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} -\frac{f'_{x_2}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}\,dx_1 + \frac{f'_{x_1}}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}\,dx_2\,,$$

где $x_0 \in D$ – произвольно фиксированная точка и интегрирование производится вдоль произвольных дуг, соединяющих в D точки x_0 и x. Уравнение (4.3.39) и односвязность D гарантируют однозначность функции $u(x)$.

Далее находим

$$u'_{x_1} = -\frac{f'_{x_2}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,, \quad u'_{x_2} = \frac{f'_{x_1}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,,$$

откуда

$$f'_{x_1} = \frac{u'_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,, \quad f'_{x_2} = -\frac{u'_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

и равенство смешанных производных функции $f(x)$ приводит к уравнению (4.3.29) для функции $u(x)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

с коэффициентами a_{ij} $(i,j=1,2)$, выражающимися по формулам

$$a_{11} = \frac{1-f'^2_{x_2}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{f'_{x_1}f'_{x_2}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,, \quad a_{22} = \frac{1-f'^2_{x_1}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,.$$

Пусть F – поверхность, заданная над областью D уравнением $x_3 = u(x_1,x_2)$. Так как $u(x)$ есть решение уравнения минимальной поверхности (4.3.29), то пользуясь теоремой 1.3.4, можно заключить, что цепь $\{U_m\}$, $U_m = \{x \in D : |x| > m\}$, имеет 2-емкость нуль в метрике поверхности F.

Заметим теперь, что $\mathcal{L}[f(x)] = 0$. Для доказательства утверждения нам достаточно установить, что оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике ds^2_F. Мы имеем

$$\sqrt{g}\,\mathcal{E}_F(\xi) = \frac{1+u'^2_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\xi_1^2 - 2\,\frac{u'_{x_1}u'_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\xi_1\xi_2 + \frac{1+u'^2_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\xi_2^2 =$$

$$= \frac{1-f'^2_{x_2}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,\xi_1^2 + 2\,\frac{f'_{x_1}f'_{x_2}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,\xi_1\xi_2 + \frac{1-f'^2_{x_1}}{\sqrt{1-|\nabla f|^2}}\,\xi_2^2\,.$$

Таким образом,

$$\sqrt{g}\,\mathcal{E}_F(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\,.$$

Пользуясь положительной определенностью матрицы (a_{ij}), приходим к неравенству

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\eta_j\right)^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\xi_i\xi_j\right)\,\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\eta_i\eta_j\right) =$$

$$= \sqrt{g}\,\mathcal{E}_F(\xi)\,\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\,\eta_i\eta_j\,,$$

справедливому при всех ξ, $\eta \in \mathbb{R}^2$, и неравенство (4.3.5) доказано. $\square$

4.3.5 Теорема Берса

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ и $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность. Пусть $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор, определенный соотношением (4.3.34). В настоящем разделе мы будем предполагать, что для оператора $\mathcal{L}$ при всех $x \in D$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$\nu_1\,\sqrt{g(x)}\,\mathcal{E}_F(\xi) \le \sum_{i=1}^{2} \xi_i A_i(x,\xi) \tag{4.3.40}$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x) A_i(x,\xi) A_j(x,\xi) \le \nu_2\, g(x)\,\mathcal{E}_F(\xi)\,, \tag{4.3.41}$$

где ν_1, $\nu_2 > 0$ – некоторые постоянные. Пользуясь неравенством (4.3.5), несложно показать, что условия (4.3.40) и (4.3.41) влекут принадлежность $\mathcal{L}$ классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике поверхности F (с постоянной $q = \nu_2/\nu_1$).

Чтобы не усложнять черезмерно построения будем предполагать здесь коэффициенты $g_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$ метрики ds_F^2 имеющими производные, непрерывные по Гельдеру локально в D, а под решениями уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$ понимать C^2-решения.

Лемма 4.3.3 *Пусть* $x_3 = f(x_1, x_2)$ *– решение в области* D *уравнения* $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$, *где* $\mathcal{L}$ *– оператор, удовлетворяющий* (4.3.40) *и* (4.3.41). *Тогда для произвольной ограниченной подобласти* $\Delta \subset\subset D$ *выполнено*

$$\int\limits_{\Delta} \mathcal{E}_F(\nabla f)\,\sqrt{g(x)}\,dx \le 4M^2\,\nu\,\mathrm{cap}_{2,F}(\overline{\Delta}, \partial D; D)\,, \tag{4.3.42}$$

где

$$M = \sup_D |f(x)|\,, \quad \nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}\,.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ – функция класса $\mathrm{Lip}_0(D)$, обращающаяся в 1 на Δ. Пользуясь формулой Грина, имеем

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^2 (f\varphi^2)'_{x_i}\,A_i(x, \nabla f)\,dx = -\int\limits_D f\,\varphi^2\,\mathcal{L}[f(x)]\,dx = 0\,.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_D \varphi^2\,\sum_{i=1}^2 f'_{x_i}\,A_i(x, \nabla f)\,dx \le 2M\int\limits_D |\varphi|\,\left|\sum_{i=1}^2 \varphi_{x_i}\,A_i(x, \nabla f)\right|\,dx\,. \tag{4.3.43}$$

Так как оператор $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\mathcal{A}(2)$ в метрике ds_F^2, то

$$\left|\sum_{i=1}^2 \varphi_{x_i}\,A_i(x, \nabla f)\right|^2 \le q\sqrt{g}\,\mathcal{E}_F(\nabla\varphi)\,\sum_{i=1}^2 f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\,.$$

Поэтому из (4.3.43) следует, что

$$\int\limits_D \varphi^2\,\sum_{i=1}^2 f_{x_i}\,A_i(x, \nabla f)\,dx \le \tag{4.3.44}$$

$$\le 2M\sqrt{q}\int\limits_D |\varphi|\sqrt{g}\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla\varphi)\,\left(\sum_{i=1}^2 f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\right)^{1/2}\,dx\,.$$

Воспользуемся интегральным неравенством Коши

$$\int\limits_D |\varphi|\sqrt{g}\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla\varphi)\left(\sum_{i=1}^{2} f'_{x_i}A_i(x,\nabla f)\right)^{1/2} dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_D \mathcal{E}_F(\nabla\varphi)\,\sqrt{g}\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_D \varphi^2\sum_{i=1}^{2} f'_{x_i}A_i(x,\nabla f)\,dx\right)^{1/2}.$$

Таким образом, неравенство (4.3.44) влечет

$$\int\limits_D \varphi^2\,\sum_{i=1}^{2} f_{x_i}\,A_i(x,\nabla f)\,dx \le 4M^2\nu\int\limits_D \mathcal{E}_F(\nabla\varphi)\,\sqrt{g(x)}\,dx\,.$$

Учитывая, что $\varphi\equiv 1$ на Δ, а также условие (4.3.40) на $\mathcal{L}$, находим

$$\int\limits_\Delta \mathcal{E}_F(\nabla f)\sqrt{g(x)}\,dx \le 4M^2\nu\int\limits_D \mathcal{E}_F(\nabla\varphi)\;\sqrt{g(x)}\,dx\,. \tag{4.3.45}$$

Зададим ограниченную область D' такую, что $\overline{\Delta}\subset D'$, $\overline{D'}\subset D$. Выбирая функцию $\varphi(x)$ так, чтобы $\operatorname{supp}\varphi(x)\subset D'$, и минимизируя правую часть (4.3.45) по всем $\varphi(x)$ указанного вида, приходим к оценке

$$\int\limits_\Delta \mathcal{E}_F(\nabla f)\sqrt{g(x)}\,dx \le 4M^2\nu\,\mathrm{cap}_{2,F}(\overline{\Delta}, D\setminus D'; D)\,.$$

Произвол в выборе подобласти D' влечет справедливость (4.3.42). □

Нам потребуется следующий, емкостной вариант принципа длины и площади (см. выше, раздел 3.2.2).

Лемма 4.3.4 *Пусть Δ – ограниченная подобласть области D, $\overline{\Delta}\subset D$, и пусть $x_3=f(x_1,x_2)$ – функция класса $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D\setminus\overline{\Delta})$. Тогда существует простая жорданова кривая $\gamma\subset D\setminus\overline{\Delta}$, разделяющая $\partial\Delta$ и ∂D и такая, что*

$$\mathrm{osc}^2\{f,\gamma\}\le 2\,\mathrm{cap}_{F,2}(\overline{\Delta},\partial D;D)\int\limits_{D\setminus\overline{\Delta}} \mathcal{E}_F(\nabla f)\,\sqrt{g(x)}\,dx\,, \tag{4.3.46}$$

где символом $\operatorname{osc}\{f, \gamma\}$ *обозначено колебание функции* f *на* γ.

Доказательство см. в [108, стр. 252 – 257] либо, для случая финслеровой метрики, — в [84, теорема 1.9.1].

Пусть D – внешность круга радиуса r_0, $0 < r_0 < \infty$, в $\mathbb{R}^2$ и пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность. Обозначим через U_m множество $\{x \in D : |x| > m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим цепь $\{U_m\}$.

Теорема 4.3.9 *Пусть* $\mathcal{L}$ *– оператор, удовлетворяющий предположениям* (4.3.40) *и* (4.3.41) *в метрике* ds_F^2, *и пусть* $x_3 = f(x_1, x_2)$ *– решение уравнения* $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$ *в области* D.

Если поверхность F *такова, что* $\operatorname{cap}_{F,2}\{U_m\} = 0$, *и решение* $f(x)$ *ограничено, то* $f(x)$ *имеет предел при* $|x| \to \infty$.

Доказательство. Зададим постоянные $r_0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < \infty$ и обозначим через Δ_{ij} круговое кольцо $r_i < |x| < r_j$ $(i < j)$. На основании леммы 4.3.3 имеем

$$\int\limits_{\Delta_{ij}} \mathcal{E}_F(\nabla f)\,\sqrt{g(x)}\,dx \le \tilde{c}\,\operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{23}, D \setminus \Delta_{14}; D\right)\,,$$

где $\tilde{c}$ – некоторая постоянная.

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{23}, D \setminus \Delta_{14}; D\right) &\le \operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{03}, D \setminus \Delta_{02}; D\right) + \\ &+ \operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{03}, D \setminus \Delta_{04}; D\right)\,.\end{aligned}$$

Так как

$$\operatorname{cap}_{F,2}\{U_m\} = 0\,,$$

то

$$\lim_{r_4 \to \infty} \operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{03}, D \setminus \Delta_{04}; D\right) = 0\,,$$

а потому

$$\int\limits_{\Delta_{23}} \mathcal{E}_F(\nabla f)\sqrt{g(x)} \le \tilde{c}\,\operatorname{cap}_{F,2}\left(\overline{\Delta}_{01}, D \setminus \Delta_{02}; D\right)\,. \tag{4.3.47}$$

По лемме 4.3.4 найдется кривая γ, разделяющая граничные компоненты кольца Δ_{23}, для которой

$$\mathrm{osc}^2\{f,\gamma\} \le 2\,\mathrm{cap}_{F,2}(\overline{\Delta}_{02}, D\setminus\Delta_{03}; D)\int\limits_{\Delta_{23}} \mathcal{E}_F(\nabla f)\,\sqrt{g(x)}\,dx\,.$$

Отсюда, в силу (4.3.47), получаем

$$\mathrm{osc}^2\{f,\gamma\} \le 2\tilde{c}\,\mathrm{cap}_{F,2}(\overline{\Delta}_{02}, D\setminus\Delta_{03}; D)\,\mathrm{cap}_{F,2}(\overline{\Delta}_{01}, D\setminus\Delta_{02}; D)\,.$$

Правая часть неравенства стремится к 0 при $r_3\to\infty$. Поэтому найдется последовательность простых жордановых кривых $\{\gamma_l\}$ $(l=1,2,\ldots)$, отделяющих круг $|x|<r_2$ от ∞, вдоль которой

$$\lim_{l\to\infty}\mathrm{osc}\,\{f,\gamma_l\}=0\,.$$

Пусть D_l $(l=1,2,\ldots)$ – неограниченные компоненты связности множеств $D\setminus\gamma_l$. Так как решение $f(x)$ ограничено в D_l, то согласно теореме 4.3.4 будем иметь

$$\mathrm{osc}\,\{f,D_l\}\le\mathrm{osc}\,\{f,\gamma_l\}\,.$$

Тем самым

$$\lim_{l\to\infty}\mathrm{osc}\,\{f,D_l\}=0\,,$$

и теорема доказана. □

Отметим специальный случай теоремы 4.3.9, в котором метрика ds_F^2 евклидова, а оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям (2.2.15), (2.2.16) с $p=2$.

Следствие 4.3.7 *Если $x_3=f(x_1,x_2)$ – ограниченное в области $D=\{|x|\le r_0\}$ решение уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)]=0$, то $f(x)$ имеет предел при $|x|\to\infty$.*

Рассмотрим класс дифференциальных операторов $\mathcal{L}$, подчиненных требованиям

$$\nu_1\frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\le\sum_{i=1}^{2}\xi_i A_i(x,\xi)\,, \tag{4.3.48}$$

$$|A(x,\xi)|\le\nu_2\frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\,, \tag{4.3.49}$$

где ν_1, $\nu_2 > 0$ – постоянные.

При данных условиях на $\mathcal{L}$ справедлива

Теорема 4.3.10 *Пусть $x_3 = f(x_1, x_2)$ – ограниченное в области $D = \{|x| > r_0\}$ решение уравнения $\mathcal{L}[f(x)] = 0$. Тогда $f(x)$ имеет предел при $|x| \to \infty$.*

Доказательство. Обозначим через F поверхность, задаваемую над областью D уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. Условия (4.3.48), (4.3.49) на $\mathcal{L}$ влекут выполнение неравенства (4.3.5) и, далее, по теореме 1.3.4 имеем $\mathrm{cap}_{F,2}\{U_m\} = 0$.

Таким образом, достаточно показать, что требования (4.3.48), (4.3.49) обеспечивают выполнение условий (4.3.40), (4.3.41) в метрике поверхности F. В действительности мы покажем, что (4.3.40), (4.3.41) имеют место на решении $f(x)$ уравнения $\mathcal{L}\,[f(x)] = 0$, то есть при $\xi = \nabla f$. Этого, очевидно, будет достаточно.

Пользуясь соотношениями (4.3.26), будем иметь

$$\sqrt{g(x)}\mathcal{E}_F(\nabla f) = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\,\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\, f'_{x_i} f'_{x_j} = \tag{4.3.50}$$

$$= \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\delta_{ij} - \frac{f'_{x_i} f'_{x_j}}{1 + |\nabla f|^2}\right)\, f'_{x_i} f'_{x_j} = \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,.$$

Тем самым, из условия (4.3.48) следует (4.3.40).

Чтобы проверить (4.3.41), запишем

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} A_i(x, \nabla f)\, A_j(x, \nabla f) = \sum_{i,j=1}^{2}(\delta_{ij} + f'_{x_i} f'_{x_j}) A_i(x, \nabla f) A_j(x, \nabla f) =$$

$$= |A(x, \nabla f)|^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} f'_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\right)^2\,.$$

Отсюда, на основании (4.3.49) и (4.3.50), получаем

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, A_i(x, \nabla f)\, A_j(x, \nabla f) \le (1 + |\nabla f|^2)\, |A(x, \nabla f)|^2 \le$$

$$\leq \nu_2^2\,|\nabla f|^2 = \nu_2^2\, g(x)\,\mathcal{E}_F(\nabla f)\,,$$

что доказывает (4.3.41). Теорема доказана. $\square$

Докажем утверждение, обобщающее известную теорему Л. Берса о существовании предела в бесконечно удаленной точке градиента решения уравнения минимальной поверхности, определенного над внешностью круга в $\mathbb{R}^2$. Пусть $D = \{|x| > r_0\}$ – как и выше, и пусть $A_i(\xi)$ $(i = 1, 2)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и подчиненные условиям (4.3.48), (4.3.49). Обозначим через $a_{ij}(\xi) = \partial A_i / \partial \xi_i$ $(i, j = 1, 2)$ и предположим, что матрица (a_{ij}) удовлетворяет (4.3.12) с абсолютной постоянной $c > 1$, причем знак равенства в (4.3.12) не достигается ни при каких конечных значениях ξ. Предположим также, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\theta(\tau)$, суммируемая по $\mathbb{R}^1$ и обладающая свойствами:

$$\theta(\tau) > 0\,, \quad \theta(-\tau) = \theta(\tau)\,, \quad \theta'(\tau) \leq 0 \quad \forall\, t \geq 0\,,$$

для которой при любых $\xi \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$(1 + \xi_1^2)\, a_{11} + \xi_1 \xi_2\, (a_{12} + a_{21}) + (1 + \xi_2^2)\ \leq q\, \theta(|\xi|)\, \sqrt{1 + |\xi|^2}\,, \qquad (4.3.51)$$

где $0 < q < \infty$ – постоянная.

При перечисленных условиях справедлива

Теорема 4.3.11 *Всякое, трижды непрерывно дифференцируемое в области $D = \{|x| > r_0\}$ решение уравнения*

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\, A_i(\nabla f) = 0 \qquad (4.3.52)$$

имеет конечный предел градиента $\nabla f(x)$ при $|x| \to \infty$.

Доказательство. Рассуждая как при доказательстве теоремы 4.3.3 и пользуясь теоремой 1.3.4, устанавливаем ограниченность производных f'_{x_1}, f'_{x_2} во внешности круга $D_1 = \{|x| > r_1\}$, где $r_1 > r_0$.

Покажем, что производные f'_{x_1}, f'_{x_2} имеют предел при $|x| \to \infty$. Положим $u(x) = f'_{x_1}(x)$. Дифференцируя (4.3.52) по переменной x_1, получаем

$$\mathcal{L}[u(x)] = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\nabla f)\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0\,. \qquad (4.3.53)$$

Так как неравенство (4.3.12) выполняется в указанном выше строгом смысле и производные f'_{x_i} $(i=1,2)$ ограничены в области D_1, то существует постоянная $\delta(D_1)$ такая, что всюду в D_1 выполнено

$$4\,a_{11}a_{22}-(a_{12}+a_{21})^2 \geq \delta(D_1)>0\,. \tag{4.3.54}$$

Кроме того из неравенства (4.3.51) вытекает, что

$$(1+f'^2_{x_1})\,a_{11}+f'_{x_1}f'_{x_2}(a_{12}+a_{21})+(1+f'^2_{x_2})\,a_{22}\leq q_1\sqrt{1+|\nabla f|^2}\,, \tag{4.3.55}$$

где

$$q_1=q\,\max_{\tau\in\mathbb{R}^1}\theta(\tau)\,.$$

Наличие свойств (4.3.54), (4.3.55) гарантирует, что оператор $\mathcal{L}$, определяемый соотношением (4.3.53), удовлетворяет в области D_1 условиям следствия 4.3.7. Учитывая ограниченность $u(x)$, получаем нужное. Теорема доказана. $\Box$

Предположениям теоремы 4.3.11 удовлетворяет, в частности, уравнение минимальной поверхности. Поэтому справедливо

Следствие 4.3.8 *Всякое решение $f(x)$ уравнения минимальной поверхности, заданное в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^2$, имеет конечный предел градиента $\nabla f(x)$ при $|x|\to\infty$.*

Данное высказывание принадлежит Л. Берсу [126]. Аналогичный результат для экстремалей функционалов вида

$$\int F(f'_{x_1},f'_{x_2})\,dx\,,$$

где функция F подчинена некоторым специальных ограничениям, принадлежит Х. Дженкинсу [184]. В более общей ситуации — Л. Саймону [232], [233]. Относительно многомерных вариантов теоремы Л. Берса см. [102].

4.4 Минимальные трубки и ленты

Ниже рассматриваются двумерные минимальные трубки и ленты в $\mathbb{R}^n$. При изложении результатов мы следуем, в основном, [70] и [76], [89].

4.4.1 Погружения

Условимся в обозначениях. Пусть M – p-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^3 с краем либо без края. Рассмотрим поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$, заданную C^3-погружением $u : M \to \mathbb{R}^n$, где $2 \le p \le n-1$.

Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$ индуцирует на поверхности $\mathcal{M}$ риманову метрику. В дальнейшем $\mathcal{M}$ рассматривается как риманово многообразие, наделенное этой метрикой.

Обозначим через $T(\mathcal{M})$ и $N(\mathcal{M})$ – касательное и нормальное расслоения над $\mathcal{M}$, через $T_m = T_m(\mathcal{M})$ и $N_m = N_m(\mathcal{M})$ – касательное и нормальное пространства в точке $u(m)$. Для пары векторов x, $y \in T_m$ символом $\langle x, y\rangle$ обозначается их скалярное произведение. Через $\overline{\nabla}$ и ∇ обозначаем связности в $\mathbb{R}^n$ и $T(\mathcal{M})$ (либо $N(\mathcal{M})$) соответственно. При этом для любых сечений X, Y расслоения $T(\mathcal{M})$ и сечения ξ расслоения $N(\mathcal{M})$ справедливы тождества

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T, \quad \nabla_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^N, \tag{4.4.1}$$

где символом $(v)^T$ (или $(v)^N$) условимся обозначать ортогональную проекцию вектора $v \in \mathbb{R}^n$ на касательное (нормальное) пространство в соответствующей точке.

Вторая квадратичная форма B поверхности $\mathcal{M}$ определяется как билинейное симметрическое отображение из T_m в N_m, двойственное к гомеоморфизму Вейнгартена A^ξ касательного пространства $T_m(\mathcal{M})$ на себя. При этом

$$A^\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T$$

и

$$\langle B(X,Y), \xi\rangle = \langle A^\xi(X), Y\rangle$$

для любых $\xi \in N(\mathcal{M})\,, \quad X, Y \in T(\mathcal{M})$ (см., например, [103]).

Так как B – билинейная форма на касательных пространствах $T_m(\mathcal{M})$ со значениями в $N_m(\mathcal{M})$ и на $T_m(\mathcal{M})$ задано скалярное произведение, то можно определить след формы B. Получится сечение расслоения $N(\mathcal{M})$, которое будем обозначать через H. Сечение H называется *средней кривизной* (или вектором средней кривизны) вложенного многообразия $\mathcal{M}$. Если

$$e_1, e_2, \ldots, e_p$$

– ортонормированный базис в $T_m(\mathcal{M})$, то

$$N = \sum_{i=1}^{p} B(e_i, e_i) \tag{4.4.2}$$

(см. [47, §5, гл. VII], [103]).

Напомним, что поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ является *минимальной*, если ее средняя кривизна H тождественно обращается в нуль.

Имеет место следующее общее утверждение, описывающее поверхности в $\mathbb{R}^n$ с заданным вектором средней кривизны H.

Лемма 4.4.1 *Пусть $E_1, \ldots, E_p$ – ортонормированный базис в $T_m(\mathcal{M})$ и пусть ξ и Y – произвольные сечения расслоений $N(\mathcal{M})$ и $T(\mathcal{M})$ соответственно. Тогда*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A^\xi Y) &= \sum_{i=1}^{p} \langle B(E_i, Y), \nabla_{E_i} Y\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \langle A^\xi E_i, \nabla_{E_i} Y\rangle + \langle \nabla_Y H, \xi\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Доказательство. Отметим сначала следующее тождество

$$\nabla_E A^\xi(E) = \nabla_Y A^\xi(E) + A^{\nabla_E \xi}(Y) - A^{\nabla_Y \xi}(E) + A^\xi[E, Y]\,, \tag{4.4.4}$$

где $[E, Y] = \nabla_E Y - \nabla_Y E$ – коммутатор векторных полей E и Y.

Справедливость (4.4.4) вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \nabla_E(A^\xi Y) &= (\overline{\nabla}_E A^\xi Y)^T = -(\overline{\nabla}_E(\overline{\nabla}_Y \xi)^T)^T = \\ &= -(\overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_Y \xi)^T + (\overline{\nabla}_E \nabla_Y \xi)^T = \\ &= -(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_E \xi + \overline{\nabla}_{[E,Y]}\xi)^T - A^{\nabla_Y \xi}(E) = \\ &= -(\overline{\nabla}_Y(-A^\xi E) + \overline{\nabla}_Y \nabla_E \xi)^T + A^\xi([E, Y]) - A^{\nabla_Y \xi}(E)\,. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (4.4.4), находим

$$\begin{aligned}\operatorname{div} A^{\xi}(Y) &= \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, \nabla_{E_i} A^{\xi}(Y)\rangle = \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, \nabla_Y (A^{\xi} E_i)\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, A^{\nabla_{E_i}\xi} Y\rangle - \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, A^{\nabla_Y \xi}(E_i)\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, A^{\xi}[E_i, Y]\rangle \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4\,.\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Найдем Σ_2 и Σ_3. Мы имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{i=1}^{p}\langle B(E_i, Y), \nabla_{E_i}\xi\rangle\,, \\ \Sigma_3 &= \sum_{i=1}^{p}\langle B(E_i, E_i), \nabla_Y \xi\rangle = \langle \operatorname{trace} B, \nabla_Y \xi\rangle = \langle H, \nabla_Y \xi\rangle\,.\end{aligned}$$

Пусть A – сечение расслоения, слои которого в каждой точке $\mathcal{M}$ совпадают с пространствами симметрических гомоморфизмов $T_m(\mathcal{M}) \to T_m(\mathcal{M})$. Для всякого ортонормированного базиса E_1, E_2, …, E_p пространства $T_m(\mathcal{M})$ и всякого вектора $Y \in T_m(\mathcal{M})$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{p}\langle A(E_i), \nabla_Y E_i\rangle = 0\,. \tag{4.4.6}$$

Действительно, достаточно заметить, что сумма в (4.4.6) не зависит от выбора базиса E_1, E_2, …, E_p, поскольку в специальном базисе, состоящем из собственных полей сечения A (его локальное существование есть следствие симметричности A) эта сумма принимает вид

$$\sum_{i=1}^{p}\langle AE_i, \nabla_Y E_i\rangle = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\,\langle E_i, \nabla_Y E_i\rangle = 0\,.$$

Рассмотрим теперь произвольный базис F_1, $F_2, \ldots, F_p$. Пусть

$$F_j = \sum_{i=1}^{p}\alpha_{ji}\,E_i\,, \quad \sum_{i=1}^{p}\alpha_{ji}\,\alpha_{ki} = \delta_{jk}\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p}\langle AF_j, \nabla_Y F_j\rangle &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i,k=1}^{p}\langle AE_i, E_k\nabla_Y\alpha_{jk} + \alpha_{jk}\nabla_Y E_k\rangle\,\alpha_{ji} = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle AE_i, \nabla_Y E_i\rangle + \sum_{i,k=1}^{p}\left(\langle AE_i, E_k\rangle\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}\nabla_Y\alpha_{jk}\right) = \\ &= \sum_{i,k=1}^{p}\left(\langle AE_i, E_k\rangle\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}\nabla_Y\alpha_{jk}\right).\end{aligned}$$

Ввиду симметричности $\langle AE_i, E_k\rangle$ и кососимметричности выражения

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}\nabla_Y\alpha_{jk}$$

по индексам i и k, последнее слагаемое также обращается в нуль.

Используя равенство (4.4.6), теперь легко вычисляем Σ_1 и Σ_4:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, \nabla_Y(A^\xi E_i)\rangle = -\sum_{i=1}^{p}\langle A^\xi E_i, \nabla_Y E_i\rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{p}\nabla_Y\langle A^\xi E_i, E_i\rangle = \nabla_Y(\mathrm{trace}A^\xi) = \nabla_Y\langle H, \xi\rangle\,; \\ \Sigma_4 &= \sum_{i=1}^{p}\langle E_i, A^\xi([E_i, Y])\rangle = \sum_{i=1}^{p}\langle A^\xi E_i, \nabla_{E_i}Y - \nabla_Y E_i\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle A^\xi E_i, \nabla_{E_i}Y\rangle\,.\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для сумм Σ_i в равенство (4.4.5), приходим к нужному соотношению (4.4.3). $\square$

Лемма 4.4.2 *Если $\mathcal{M} = (M, u)$ – p-мерная C^3-поверхность, погруженная в $\mathbb{R}^n$, то для любого вектора $e \in \mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\Delta f(m) = n \langle H, e \rangle, \quad f(m) = \langle u(m), e \rangle.$$

В частности, если поверхность $\mathcal{M}$ минимальна, то f есть гармоническая на $\mathcal{M}$ функция.

Доказательство см. [47, т. II, стр. 308 – 309].

4.4.2 Трубки в полупространстве

Пусть M – многообразие без края и $\mathcal{M} = (M, u)$ – поверхность. Всюду ниже предполагается, что погружение u *собственно*, то есть прообразом всякого компактного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ является компактное множество в M.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ *трубчата*, если существует вектор $e_0 \in \mathbb{R}^n$ и два числа $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ такие, что для всякой гиперплоскости $\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_0 \rangle = t\}$, ортогональной e_0, сечение $u(M) \cap \Pi_t \neq \emptyset$ при любом $t \in (a, b)$ и всякая ее порция $\mathcal{M}(t_1, t_2)$, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2} при $a < t_1 < t_2 < b$ является компактом. В этом случае интервал (a, b) будем называть *проекцией поверхности* $\mathcal{M} = (M, u)$, а конечную либо бесконечную разность $(b - a)$ — *длиной проекции*.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ *трубчата в целом*, если она является трубчатой с проекцией $(-\infty, +\infty)$.

Простейший пример трубчатой в целом минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ дает катеноид. Многочисленные примеры двумерных погруженных трубчатых минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ легко строятся исходя из представления для таких поверхностей, данного в [218].

В формулируемой ниже теореме предполагается, что $\operatorname{codim} \mathcal{M} > 1$. Случай трубчатых минимальных поверхностей коразмерности 1 является особым и рассмотрен в [46, раздел 2.1]. Трубчатые минимальные поверхности с нетривиальными группами симметрий изучались А.Т. Фоменко [112] – [113].

Имеет место

Теорема 4.4.1 *Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ – двумерная трубчатая в целом минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Если существует гиперплоскость Π, не пересекающая $u(M)$, то множество $u(M)$ лежит в некоторой гиперплоскости Π_1, параллельной Π.*

Часть **доказательства** целесообразно провести в несколько более общем виде, нежели это требуется условиями. Дадим сначала нужное определение [74].

Рассмотрим многообразие M с краем $\partial M \neq \emptyset$ и назовем поверхность $\mathcal{M}$ *лентой с проекцией* (a, b), если существует вектор $e_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

(i) всякое сечение $u(M) \cap \Pi_t = \Sigma_{e_0}(t)$ непусто при $t \in (a, b)$ и содержит точки края $u(\partial M)$;

(ii) всякая порция $u(M)$, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2}, где $a < t_1 < t_2 < b$, является компактным множеством в $\mathcal{M}$;

(iii) всюду на крае $\partial\mathcal{M}$ выполнено $\langle \nu, e_0 \rangle = 0$, где ν – внутренняя нормаль на $\mathcal{M}$ к границе $\partial\mathcal{M}$, или, что то же самое, $\nabla_\nu f = 0$ всюду на $\partial\mathcal{M}$, для $f = \langle u, e_0 \rangle$.

Комментарии. Простой пример двумерной минимальной ленты с проекцией $(-\infty, +\infty)$ (как и в случае трубчатых поверхностей такие ленты мы будем называть лентами "в целом") доставляет часть геликоида, высекаемая соосным с ней цилиндром конечного радиуса. Легко видеть, что множество

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \{\mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p-1} x_i^2 \leq 1\,, \quad x_p = 0\}$$

является плоской минимальной лентой в целом коразмерности 1 для любого $p \geq 2$. Тем самым, минимальные ленты в целом существуют при всех размерностях.

Идею рассмотрения минимальных лент мы заимствовали из теории релятивистской струны (см., например, [8], [19]), в которой минимальные ленты и трубки (но в пространстве – времени Минковского $\mathbb{R}^n_1$) являются важнейшим объектом исследования. Изучение подобного объекта в $\mathbb{R}^n$ кажется также перспективным.

Сформулируем аналог теоремы 4.4.1 для минимальных лент "в целом", теперь уже не обязательно двумерных.

Теорема 4.4.2 *Пусть* $\mathcal{M} = (M, u)$ *–* p*-мерная минимальная лента "в целом", расположенная в подмножестве* $x_1 \leq 0$ *пространства* $\mathbb{R}^n$, $2 \leq p \leq n-1$. *Тогда, если всюду на границе ленты* $\partial\mathcal{M}$ *выполнено* $\langle \nu, e_1 \rangle = 0$ *(где единичный вектор* e_1 *соответствует координате*

x_1), то множество $u(M)$ расположено в некоторой гиперплоскости $x_1 \equiv \mathrm{const}$.

Возвращаясь к доказательству теорем 4.4.1 и 4.4.2, заметим, что в силу леммы 4.4.2 функция $f = \langle u, e_0 \rangle$ является специальной функцией исчерпания минимальной ленты (или трубки) $\mathcal{M}$. Тем самым, согласно теореме 1.1.1 поверхность $\mathcal{M}$ имеет 2-параболический тип.

Поскольку свойство минимальности трубки $\mathcal{M} = (M, u)$ инвариантно относительно группы ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что в обоих случаях поверхность $\mathcal{M}$ расположена в полупространстве $x_1 \leq 0$.

Функция $f_1(m) = \langle u, e_1 \rangle$ гармонична в метрике поверхности $\mathcal{M}$, ограничена сверху на $\mathcal{M}$ и (в случае ленты) для ее нормальной производной всюду на границе $\partial\mathcal{M}$ выполнено $f_1 \langle \partial f_1/\partial \nu, \nu \rangle = 0$. По теореме 2.3.2 имеем $f_1 \equiv \mathrm{const}$ и $\mathcal{M}$ лежит в гиперплоскости $x_1 \equiv \mathrm{const}$. □

Упражнение. *Доказать теорему 4.4.2, заменив предположение*

$$\langle \nu, e_1 \rangle = 0$$

условием $\langle \nu, e_1 \rangle \leq 0$.

4.4.3 "Уплощение" концов

Теоремы 4.4.1 и 4.4.2 представляют собой геометрические интерпретации теоремы Лиувилля для гармонических функций на трубках и лентах в целом. Следующие теоремы являются аналогами теоремы об устранимости изолированной особенности и утверждают, что минимальная трубка (лента) с проекцией $(a, +\infty)$, заключенная между двумя параллельными гиперплоскостями, должна "уплощаться" на бесконечности.

Теорема 4.4.3 *Если двумерная, двусвязная трубчатая минимальная поверхность с проекцией $(a, +\infty)$ расположена в слое*

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq 1\},$$

то

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{osc} \{x_1, \Sigma_{e_0}(t)\} = 0\,.$$

Доказательство этой теоремы проведем параллельно с доказательством аналогичного утверждения для минимальных лент, сечения $\Sigma_{e_0}(t)$ которых являются связными кривыми.

Теорема 4.4.4 *Если двумерная минимальная лента (указанного вида) с проекцией $(a, +\infty)$ расположена в слое $|x_1| \le 1$ и всюду на части $\partial\mathcal{M}$, не лежащей в $\Sigma_{e_0}(a)$, выполнено $\langle e_1, \nu\rangle = 0$, то колебание координаты x_1 на кривой $\Sigma_{e_0}(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.*

Для доказательства указанных утверждений нам потребуется

Лемма 4.4.3 *Предположим, что двумерная трубчатая минимальная поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ в $\mathbb{R}^n$ (или лента $\mathcal{M} = (M, u)$, не обязательно двумерная) имеет проекцию $(a, +\infty)$ и расположена в слое $|x_1| \le 1$.*

Тогда

$$\int\limits_{a_1}^{+\infty} \psi^2(t)\, dt < \infty\,, \tag{4.4.7}$$

где

$$\psi(t) = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f_1|\, d\mathcal{H}^1$$

и $f_1 = \langle x, e_1\rangle$, $a_1 > a$ – произвольно.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что a_1 и b $(a_1 < b)$ суть регулярные значения функции $f = \langle u(m), e_0\rangle$. Мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}(a_1,b)} |\nabla f_1|^2\, d\mathcal{M} = \int\limits_{\partial\mathcal{M}(a_1,b)} f_1\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1 =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{e_0}(b)} f_1\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1 - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a)} f_1\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1 + \int\limits_{\partial\mathcal{M}\cap\mathcal{M}(a_1,b)} f_1\,\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1\,.$$

Последний интеграл обращается в нуль в силу предположений, сделанных в условиях теорем 4.4.3 и 4.4.4, и потому

$$\int\limits_{\mathcal{M}(a_1,b)} |\nabla f_1|^2\, d\mathcal{M} = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(b)} f_1\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1 + \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1\langle e_1, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^1\,. \tag{4.4.8}$$

На основании формулы Кронрода – Федерера и интегрального неравенства Коши, будем иметь

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{M}(a_1,b)} |\nabla f_1|^2\,d\mathcal{M} &= \int\limits_{a_1}^{b} dt \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} \frac{|\nabla f_1|^2}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^1 \geq \\ &\geq \int\limits_{a_1}^{b} \left(\int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f_1|\,d\mathcal{H}^1\right)^2 \left(\int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f|\,d\mathcal{H}^1\right)^{-1} dt.\end{aligned}$$

Соотношение (4.4.8) имеет место также и для функции f, являющейся специальной функцией исчерпания поверхности $\mathcal{M}$. Таким образом, при любых $a < \alpha < \beta$ выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{M}(\alpha,\beta)} |\nabla f|^2\,d\mathcal{M} = J\,(\beta - \alpha)\,,$$

где

$$J = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} \langle e_1, \nu\rangle\,d\mathcal{H}^1 > 0$$

– некоторая постоянная, зависящая только от трубки (ленты) $\mathcal{M}$. Отсюда заключаем, что при всяком $\tau \geq a_1$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathcal{M}(a_1,\tau)} |\nabla f_1|^2\,d\mathcal{H}^1 \geq \frac{1}{J}\int\limits_{a_1}^{\tau} \psi^2(t)\,dt\,. \tag{4.4.9}$$

Так как $|f_1| \leq 1$ всюду на поверхности $\mathcal{M}$, то на основании соотношения (4.4.8) можем записать

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{M}(a_1,\tau)} |\nabla f_1|^2 \, d\mathcal{H}^1 &\leq - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1 \langle e_1^T, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^1 + \int\limits_{\Sigma_{e_0}(\tau)} |e_1^T| \, d\mathcal{H}^1 = \\ &= - \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1 \langle e_1^T, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^1 + \psi(\tau)\,,\end{aligned}$$

где v^T означает проекцию вектора $v \in \mathbb{R}^n$ на касательную плоскость T_m и $\tau \geq a_1$ – произвольно.

Используя (4.4.9), отсюда получаем

$$\int\limits_{a_1}^{\tau} \psi^2(t) \, dt \leq J\,\psi(\tau) - J \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1 \langle e_1^T, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^1 \,.$$

Если предположить, что интеграл (4.4.7) расходится, то для некоторого $\tau_0 > a_1$ имеем

$$\int\limits_{a_1}^{\tau_0} \psi^2(t) \, dt \geq -J \int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1 \langle e_1^T, \nu\rangle \, d\mathcal{H}^1 \equiv C\,.$$

Полагая

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{a_1}^{\tau} \psi^2(t) \, dt\,,$$

при любом $\tau > \tau_0$ получаем

$$J\,\psi(\tau) > \Phi(\tau) - C > 0\,.$$

Замечая, что $\psi^2(\tau) = \Phi'(\tau)$, приходим к дифференциальному неравенству

$$\frac{\Phi'(\tau)}{(\Phi(\tau) - C)^2} > \frac{1}{J^2} \quad \text{при} \quad \tau > \tau_0\,.$$

Интегрируя это неравенство, находим

$$\frac{\tau-\tau_0}{J^2} < \frac{1}{\Phi(\tau_0)-C} - \frac{1}{\Phi(\tau)-C} < \frac{1}{\Phi(\tau_0)-C}\,,$$

что невозможно при достаточно больших τ. Тем самым,

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{a_1}^{\tau} \psi^2(t)\,dt \le -\int\limits_{\Sigma_{e_0}(a_1)} f_1\,\langle e_1,\nu\rangle\,d\mathcal{H}^1$$

и соотношение (4.4.7) доказано. □

Утверждения теорем 4.4.3 и 4.4.4 непосредственно вытекают из (4.4.7), если заметить, что справедлива оценка

$$\psi(t) = \int\limits_{\Sigma_{e_0}(t)} |\nabla f_1|\,d\mathcal{H}^1 \ge \operatorname{osc}\{f_1,\,\Sigma_{e_0}(t)\}\,.$$

На основании (4.4.7) тогда находим

$$\int^{+\infty} \operatorname{osc}^2\{f_1,\,\Sigma_{e_0}(t)\}\,dt < \infty$$

и для некоторой последовательности $\{\tau_k\}$, $\tau_k\to+\infty$, выполняется

$$\operatorname{osc}^2\{f_1,\,\Sigma_{e_0}(\tau_k)\}\to 0 \quad (k\to\infty)\,.$$

Учитывая (в случае ленты), что всюду на границе

$$\partial\mathcal{M}(\tau',\tau'')\setminus\big(\Sigma_{e_0}(\tau')\cup\Sigma_{e_0}(\tau'')\big)$$

выполнено $\langle\nu,e_1\rangle = 0$, в силу принципа максимума – минимума для f_1 имеем

$$\operatorname{osc}\{f_1,\,(\mathcal{M}(\tau',\tau''))\} \le \max\{\operatorname{osc}\{f_1,\Sigma_{e_0}(\tau')\},\operatorname{osc}\{f_1,\Sigma_{e_0}(\tau'')\}\}\,.$$

Это означает, что

$$\lim_{\tau_k\to+\infty}\operatorname{osc}\{f_1,\,(\mathcal{M}(\tau_k,+\infty))\} = 0$$

и нужное доказано. $\square$

Замечание. *Близкие результаты для трубчатых поверхностей, описываемых решениями систем дифференциальных уравнений с частными производными типа нулевой средней кривизны, получены в кандидатской диссертации А.Н. Кондрашова [48]. Несколько более общие результаты см. в его работе [51].*

4.4.4 Трубки размерности $p \geq 3$

Свойство трубчатости в целом для двумерной минимальной поверхности является весьма специфичным. Как показывает следующее утверждение, всякая трубчатая минимальная поверхность размерности больше 2, имеет конечную длину проекции.

Теорема 4.4.5 *Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ – трубчатая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ размерности $p \geq 3$. Тогда множество $u(M)$ расположено в слое, лежащем между двумя параллельными гиперплоскостями, ортогональными e_0.*

Докажем предварительно следующее вспомогательное утверждение. Подбирая подходящую систему координат, можно считать, не ограничивая общности, что точка $u = 0$ не содержится в образе $u(M)$.

Лемма 4.4.4 *Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ – минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $\dim \mathcal{M} = p \geq 3$. Тогда функция*

$$g(m) = \frac{1}{|u(m)|^{p-2}}$$

является супергармонической в метрике $\mathcal{M}$.

Для **доказательства** положим $\rho = \rho(m) = |u(m)|$ и для фиксированного ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $u_i = \langle u, e_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ набор координатных функций. Для произвольного касательного вектора $X \in T_m(\mathcal{M})$ будем иметь

$$\nabla_X u_i = \langle \overline{\nabla}_X u, e_i \rangle = \langle X, e_i^T \rangle ,$$

откуда следует, что $\nabla u_i = e_i^T$.

Из минимальности поверхности $\mathcal{M} = (M, u)$ вытекает, что $\Delta u_i = 0$, и, таким образом,

$$\begin{aligned}\Delta\,\rho^2(m) &= \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2(m)\right) = 2\sum_{i=1}^{n}(u_i\Delta u_i + |\nabla u_i|^2) = \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}|e_i^T|^2 = 2\rho\,.\end{aligned}$$

С другой стороны, мы видим, что

$$\Delta\rho^2 = 2\rho\,\Delta\rho + 2|\nabla\rho|^2\,,$$

а потому, из найденного выше, имеем

$$\Delta\rho = \frac{p - |\nabla\rho|^2}{\rho}\,.$$

Вычислим лапласиан от нужной нам функции

$$\begin{aligned}\Delta\rho^{2-p} &= \operatorname{div}\left((2-p)\rho^{1-p}\,\nabla\rho\right) = \\ &= (2-p)\rho^{1-p}\Delta\rho + (p-2)(p-1)\rho^{-p}|\nabla\rho|^2 = \\ &= (2-p)\rho^{-p}\left(p - p|\nabla\rho|^2\right)\,.\end{aligned}$$

Так как всюду на $\mathcal{M}$ выполнено

$$|\nabla\rho| = \frac{|u^T|}{\rho} \le \frac{u}{\rho} = 1\,,$$

то

$$\Delta\rho^{2-p} \le 0$$

и функция $g(m) = \rho^{2-p}(m)$ есть неотрицательная супергармоническая функция на $\mathcal{M}$. □

Доказательство теоремы 4.4.5. Так как функция $g(m) = \rho^{2-p}(m)$ супергармонична, то функция

$$h(\tau) = \inf_{m\in\Sigma_{e_0}(t)} g(m) = \left(\max_{m\in\Sigma_{e_0}(t)} \rho(m)\right)^{2-p}\,,$$

определенная для всех $t \in (a, b)$ является выпуклой функцией. Здесь (a, b) – проекция трубки на соответствующую ось.

Действительно, пусть $a < \alpha < \beta < b$. Тогда функция

$$g_1(m) = g(m) - \left(h(\alpha) + \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \left(f(m) - \alpha \right) \right) ,$$

где $f(m) = \langle u, e_0 \rangle$, является супергармонической как линейная комбинация супергармонической и гармонической функций. При этом

$$\min_{m \in \Sigma_{e_0}(\alpha)} g_1(m) \ = \min_{m \in \Sigma_{e_0}(\alpha)} g(m) - h(\alpha) = 0 \, ,$$

$$\min_{m \in \Sigma_{e_0}(\beta)} g_1(m) \ = \min_{m \in \Sigma_{e_0}(\beta)} g(m) - h(\beta) = 0 \, .$$

Согласно принципу максимума – минимума всюду на $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ имеем

$$g_1(m) \geq \min_{\xi \in \Sigma_{e_0} \cup \Sigma_{e_0}(\beta)} g_1(\xi) = 0 \, ,$$

т.е.

$$h(t) \geq h(\alpha) + \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} (t - \alpha) \, ,$$

что означает выпуклость (вверх) $h(\tau)$.

Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел a или b равно $\pm\infty$. К примеру, пусть $b = +\infty$. Тогда существует предел

$$\lim_{\tau \to +\infty} h(t) = \lim_{\tau \to +\infty} \left(\sup_{m \in \Sigma_{e_0}(\tau)} \rho(m) \right)^{2-p} = 0 \, ,$$

что противоречит неотрицательности выпуклой функции $h(\tau)$.

Тем самым, оба числа a и b конечны, и трубка $\mathcal{M}$ расположена в слое между гиперплоскостями Π_a и Π_b, что завершает доказательство теоремы 4.4.5. $\square$

Комментарии. *В случае* $\operatorname{codim} \mathcal{M} = 1$ *для длины проекции* $(b - a)$ *трубки имеется точная оценка сверху [46, раздел 2.1.2]. Соответствующая точная оценка в случае произвольной коразмерности неизвестна. Близкие результаты см. в [236], [111], [231].*

4.4.5 Величина образа трубки в грассманиане

Пусть G_n^2 – грассманово многообразие ориентированных двумерных плоскостей, проходящих через начало координат, с каноническим расстоянием $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$, равным углу между плоскостями γ_1, $\gamma_2 \in G_n^2$. В случае одинаково (противоположно) ориентированных плоскостей γ_1 и γ_2, величина $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ определяется как максимум из углов, образованных всевозможными парами прямых из γ_1 и γ_2 (соответственно как дополнение указанного максимума до числа π).

Пусть $m \in M$ – произвольная точка. Касательная плоскость T_m в точке $u(m)$ к поверхности $\mathcal{M} = (M, u)$ параллельна некоторой двумерной плоскости $\gamma^* \in G_n^2$ с той же ориентацией, что и T_m. Соответствие $m \to \gamma^*$ называется *гауссовым отображением* поверхности $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ образ M при этом отображении и положим

$$\delta(\mathcal{M}^*) = \inf_{\gamma_1 \in G_n^2} \sup_{\gamma_2 \in \mathcal{M}^*} \theta(\gamma_1, \gamma_2)\,.$$

Ясно, что $\delta(\mathcal{M}^*) \leq \pi$ (по определению угла $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$).

Удобно ввести следующие определения, оттеняющие геометрическую природу формулируемого ниже утверждения. Для произвольной плоскости $\gamma \in G_n^2$ рассмотрим "экватор" в G_n^2 с "полюсом" γ, определяемый как множество

$$K_\gamma = \{\xi \in G_n^2 : \theta(\xi, \gamma) = \frac{\pi}{2}\}$$

и аналогичный экватору евклидовой сферы. Множество $G_n^2 \setminus K_\gamma$ имеет две компоненты связности, называемыми половинами грассманиана G_n^2. Ясно, что плоскости $\xi \in G_n^2$ и $\overline{\xi}$ — с противоположной по отношению к ξ ориентацией, всегда лежат в разных половинах грассманиана G_n^2.

Имеет место следующее высказывание о замыкании $\overline{\mathcal{M}}^*$ образа трубки $\mathcal{M} = (M, u)$ в грассманиане G_n^2.

Теорема 4.4.6 *Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ – двумерная трубчатая в целом минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\overline{\mathcal{M}}^*$ пересекается с каждым экватором грассманиана G_n^2 или, другими словами, $\delta(\mathcal{M}^*) \geq \frac{\pi}{2}$.*

Доказательство. Предположим, что существует двумерная плоскость $V \in G_n^2$ такая, что

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{M}^*} \theta(\gamma, V) = \theta_0 < \frac{\pi}{2}\,.$$

Выберем произвольно единичный вектор $e \in V$ и зафиксируем параллельное в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $e = e(m)$, отождествляемое в каждой точке $m \in \mathcal{M}$ с вектором e. Рассмотрим функцию

$$\varphi(m) = \ln|e^T| = \ln|e^T|\,,$$

где $e^T = e^{T_m(\mathcal{M})}$ есть проекция векторного поля $e(m)$ на касательную плоскость $T_m(\mathcal{M})$.

Заметим, что при сделанных предположениях, выполнено

$$|e^{T_m}| \geq \cos\,\theta(T_m, V) \geq \cos\,\theta_0 > 0$$

и, тем самым, функция $\varphi = \varphi(m)$ определена на $\mathcal{M}$ и ограничена снизу.

Для произвольного $X \in T_m(\mathcal{M})$ выполнено

$$\begin{aligned}\nabla_X \varphi(m) \ &= \frac{1}{|e^T|}\,\nabla_X |e^T| = \frac{\langle e^T, \overline{\nabla}_X e^T\rangle}{|e^T|^2} = \\ &= \frac{1}{|e^T|}\langle \tau, -\overline{\nabla}_X e^N\rangle = \frac{1}{|e^T|}\,\langle \tau, A^{e^N}(X)\rangle = \langle X, \frac{1}{|e^T|}\,A^{e^N}(\tau)\rangle\,,\end{aligned}$$

где $\tau = e^T\big/\,|e^T|$, и потому

$$\nabla\varphi = \frac{1}{|e^T|}\,A^{e^N}(\tau)\,.$$

Воспользуемся леммой 4.4.1. Выберем ортонормированный базис E_1, E_2 в касательном пространстве $T_m(\mathcal{M})$. По определению дивергенции можем записать

$$\Delta\varphi = \frac{1}{|e^T|}\mathrm{div}\,A^{e^N}(\tau) + \left(-\frac{1}{|e^T|^2}\right)\langle \nabla|e^T|, A^{e^N}(\tau)\rangle\,. \tag{4.4.10}$$

Нетрудно видеть, что

$$\nabla|e^T| = |e^T|\,\nabla\varphi = A^{e^N}(\tau)\,.$$

Поэтому, в силу (4.4.10), имеем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{|e^T|}\,\mathrm{div}\,A^{e^N}(\tau) - \frac{1}{|e^T|^2}\,|A^{e^N}(\tau)|^2\,. \tag{4.4.11}$$

На основании леммы 4.4.1 первое слагаемое вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} A^{e^N}(\tau) = \sum_{i=1}^{2} \Big(\langle A^{e^N}(E_i), \nabla_{E_i}\tau\rangle + \langle B(\tau, E_i), \nabla_{E_i} e^N\rangle \Big) \,. \qquad (4.4.12)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\nabla_{E_i} e^N = \big(\overline{\nabla}_{E_i}(e - e^T)\big)^N = -B(e^T, E_i) = -|e^T|\, B(\tau, E_i)$$

и, далее,

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i}\tau \;&= \nabla_{E_i}\left(\frac{e^T}{|e^T|}\right) = \frac{|e^T|\nabla_{E_i} e^T - e^T\nabla_{E_i}|e^T|}{|e^T|^2} = \\ &= \frac{|e^T|\, A^{e^N}(E_i) - e^T\langle A^{e^N}(\tau), E_i\rangle}{|e^T|^2} = \\ &= \frac{1}{|e^T|}\Big(A^{e^N}(E_i) - \tau\langle A^{e^N}(E_i), \tau\rangle\Big)\,.\end{aligned}$$

Подставим найденные выражения в (4.4.12). Тогда получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} A^{e^N}(\tau) \;&= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{|A^{e^N}(E_i)|^2 - \langle A^{e^N}(E_i), \tau\rangle^2}{|e^T|} - |e^T|\,|B(\tau, E_i)|^2\right) = \\ &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{2}|A^{e^N}(E_i)|^2 - |A^{e^N}(\tau)|^2}{|e^T|} - \frac{1}{2}\|B\|^2\,|e^T|\,,\end{aligned} \qquad (4.4.13)$$

где

$$\|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} |B(e_i, E_j)|^2$$

– квадрат длины второй квадратичной формы поверхности $\mathcal{M}$.

Прямыми вычислениями убеждаемся в справедливости соотношений

$$|A^\xi(E_1)|^2 = |A^\xi(E_2)|^2 = |A^\xi(X)| \qquad (\xi \in N_m(\mathcal{M})\,,\;\; X \in T_m(\mathcal{M}))\,,$$

откуда, пользуясь (4.4.11) и (4.4.13), находим

$$\Delta\varphi = \frac{|A^{e^N}(\tau)|^2}{|e^T|^2} - \frac{1}{2}\|B\|^2 - \frac{|A^{e^N}(\tau)|^2}{|e^T|^2} = -\frac{1}{2}\,\|B\|^2 \le 0\,. \qquad (4.4.14)$$

Соотношение (4.4.14) утверждает, что функция $\varphi(m)$ супергармонична, причем, как уже отмечалось ранее, $\varphi \ge \ln(\cos\theta_0) > -\infty$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 4.4.5, заключаем, что всюду на $\mathcal{M}$ выполняется $|e^T| \equiv \mathrm{const} \ne 0$, и, следовательно,

$$\Delta\,\varphi = -\frac{1}{2}\|B\|^2 \equiv 0\,.$$

Данное свойство влечет, что поверхность $\mathcal{M}$ есть часть двумерной плоскости. Это противоречит трубчатости $\mathcal{M}$. Тем самым, предположение, сделанное в начале доказательства, о существовании плоскости V с указанными свойствами не верно, а потому для любой плоскости $V \in G_n^2$ выполнено $\sup\limits_{\gamma\in\mathcal{M}^*} \theta(\gamma, V) \ge \pi/2$. Теорема доказана. □

4.4.6 Предельные множества концов в грассманиане

Методы, применяемые выше, могут быть использованы также при изучении строения гауссова образа минимальной трубки вблизи ее концов. Рассмотрим двумерную трубчатую поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ в $\mathbb{R}^n$ с проекцией $(a, +\infty)$. Произвольное некомпактное двусвязное множество $D \subset \mathcal{M}$ с компактной границей ∂D будем называть *концом поверхности $\mathcal{M}$*.

Определим *предельное множество D'* конца поверхности при гауссовом отображении, полагая

$$D' = \cap_{t>a}\overline{D^*(t, +\infty)}\,,$$

где символом $D^*(t, +\infty) \subset G_n^2$ обозначен гауссов образ порции

$$D \cap \mathcal{M}(t, +\infty)\,.$$

Ясно, что D' есть непустое замкнутое множество в G_n^2.

Теорема 4.4.7 *Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ – двумерная трубчатая минимальная поверхность в $\mathbb{R}^n$ с проекцией $(a, +\infty)$ и пусть D – один из ее* *концов. Тогда имеет место альтернатива*

(α) *либо D' пересекается с любым экватором в G_n^2,*

(β) *либо D' состоит из единственной точки $\gamma \in G_n^2$, причем*

$$\theta(e_0, \gamma) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Доказательство. Предположим сперва, что высказывание (α) не справедливо. Не умаляя общности, будем считать, что существует плоскость $V \in G_n^2$, $D' \cap K_V = \emptyset$, такая, что множество D' вместе с V лежат в одной из половин G_n^2. Отсюда вытекает, что

$$\max \theta(\gamma(m), V) = \theta_0 < \frac{\pi}{2}\,.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < \frac{\pi}{2} - \theta_0$. По определению D' найдется (достаточно большое) $T > a$ такое, что при всех $\gamma \in \overline{D^*(T, +\infty)}$ выполнено $\theta(\gamma, V) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Заметим, что из данного неравенства вытекает, что множество $D(T, +\infty)$ гомеоморфно кольцу, т.е. является двусвязным.

Рассмотрим множество единичных векторов

$$\mathcal{O} = \{e \in \mathbb{R}^n : |e^V| > \cos\varepsilon\}\,,$$

выходящих из начала координат. Ясно, что концы векторов множества $\mathcal{O}$ образуют открытое подмножество сферы $S^{n-1}(0,1)$.

Для любых $\gamma \in G_n^2$ и $e \in \mathbb{R}^n$ верно соотношение

$$\theta(e, \gamma) \le \theta(e, V) + \theta(V, \gamma)\,,$$

где мы сохраняем то же обозначение для угла между вектором и плоскостью. Тем самым, при всех $e \in \mathcal{O}$ и $\gamma \in \overline{D^*(T, +\infty)}$ имеем

$$\theta(e, \gamma) \le \varepsilon + \theta_0 < \frac{\pi}{2}\,,$$

а потому

$$|e^\gamma| > \cos(\varepsilon + \theta_0) > 0\,.$$

Согласно (4.4.14) для произвольного ортонормированного базиса e_1, e_2 в $T_m(\mathcal{M})$ справедлива формула

$$\Delta \ln |e_i^{T_m}| = -\frac{1}{2}\|B\|^2 \qquad (i = 1, 2)\,,$$

откуда вытекает, что функция

$$\varphi(m) = \ln \frac{|e_1^{T_m}|}{|e_2^{T_m}|}$$

является гармонической. Однако, при любых $e_1, e_2 \in \mathcal{O}$, $e_1 \neq e_2$,

$$|\varphi(m)| = \left| \ln \frac{|e_1^{T_m}|}{|e_2^{T_m}|} \right| \leq -\ln \cos(\varepsilon + \theta_0)$$

и $\varphi(m)$ ограничена на $D(T, +\infty)$.

Ограниченность $\varphi(m)$ и параболичность конца D, как и при доказательстве теоремы 4.4.3, влекут, что

$$\lim_{\tau \to +\infty} \operatorname{osc} \{\varphi(m), \Sigma_{e_0}(t)\} = 0 \tag{4.4.15}$$

или, что то же самое, функция $\varphi(m)$ имеет предел на бесконечности. В терминах предельного множества D' это означает, что для каждой пары фиксированных векторов e_1, $e_2 \in \mathcal{O}$ величина $|e_1^\gamma| / |e_2^\gamma|$ не зависит от $\gamma \in G_n^2$.

Покажем, что в этом случае D' состоит из единственной точки. Если это не выполнено, то найдутся две плоскости $\gamma \neq \xi$ в D' такие, что для любых e_1, $e_2 \in \mathcal{O}$ справедливо

$$\frac{|e_1^\gamma|}{|e_2^\gamma|} = \frac{|e_1^\xi|}{|e_2^\xi|} .$$

Рассмотрим отображение $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида

$$h(x) = \frac{|x^\gamma|}{|x^\xi|}, \quad x^\xi \neq 0 .$$

Сужение $h|_{\mathcal{O}}(x)$ есть тождественная постоянная. Обозначим ее через C. В силу однородности $h(x)$, заключаем, что $h(x) \equiv C$ на открытом конусе

$$\mathcal{O}' = \{Y \in \mathbb{R}^n : \frac{Y}{|Y|} \in \mathcal{O} , \ \ Y \neq 0\} .$$

Однако $h(x)$ аналитична в области определения и потому, в силу теоремы единственности для аналитических функций,

$$h(x) \equiv \mathrm{const} = C .$$

Согласно нашему предположению, $\xi \neq \gamma$, а потому для их ортогональных дополнений $\xi^\perp$ и $\gamma^\perp$ имеем $\gamma^\perp \setminus \xi^\perp \neq \emptyset$. Выбирая $e \in \gamma^\perp \setminus \xi^\perp$, получаем, тем самым, $C = |e^\gamma|/\,|e^\xi| \neq 0$. Это невозможно, поскольку при всех $x \in \gamma^\perp \setminus \xi^\perp$, очевидно, $h(x) \neq 0$.

В случае, когда D' состоит из одной точки, можно утверждать, что $D' = \gamma \in G_n^2$ и $|e_0^\gamma| = 0$.

Действительно, предположим противное, т.е. предположим, что

$$|e^\gamma| = \cos\alpha \neq 0\,, \quad \text{где} \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

По определению предельного множества D' найдется (достаточно большое) $A > a$ такое, что

(a) число A есть регулярное значение функции $f(m) = \langle u(m), e_0\rangle$,

(b) для всякой точки $m \in D(A, +\infty)$ выполнено $\theta(\gamma, T_m) < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

В силу (a) множество $D \cap \Sigma_{e_0}(A)$ является одномерным компактным многообразием в $\mathcal{M}$, т.е. распадается в объединение конечного числа гладких замкнутых жордановых дуг. Выберем из них произвольную дугу Γ_ε и через $\tau = \tau(m)$ обозначим касательный к ней вектор в точке $m \in \Gamma_\varepsilon$. В силу нашего предположения, $e_0^\gamma \neq 0$ и, следовательно, можно найти единичный вектор $v \in \gamma$, для которого $\langle e_0^\gamma, v\rangle = 0$.

Заметим, что по определению

$$\Gamma_\varepsilon \subset D \cap \Sigma_{e_0}(A) = \{m \in D : f(m) = A\}$$

векторное поле e^{T_m} нормально к Γ_ε на $\mathcal{M}$. Тем самым, векторные поля $\tau(m)$ и e^{T_m} образуют ортогональный базис в $T_m(\mathcal{M})$. Покажем, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всякой точки $m \in \Gamma_\varepsilon$ величина $\langle v, \tau(m)\rangle$ сохраняет знак, т.е. $\langle \tau(m), v\rangle \neq 0$.

Действительно, в противном случае для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $m \in \Gamma_\varepsilon$, для которой $v^{T_m} = \mu\, e_0^{T_m}$, где $\mu \in \mathbb{R}$ – некоторое, отличное от нуля (поскольку $|v^{T_m}| \geq \cos\,\theta(\gamma, T_m) > 0$) число, вообще говоря, зависящее от m. Последнее равенство влечет, что

$$(v - \mu\, e_0)^{T_m} = 0\,,$$

т.е. вектор $w = v - \mu\, e_0$ лежит в нормальном пространстве N_m.

Мы имеем

$$\langle w, v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle e_0, v\rangle\, \mu = 1 - \langle e_0^\gamma, v\rangle\, \mu = 1\,,$$

поскольку, в силу выбора $v \in \gamma$, выполнено $\langle e_0^\gamma, v\rangle$. Однако, $w \in N_m$ и потому

$$1 \equiv |\langle w, v\rangle| = |\langle w^N, v^N\rangle| \leq |w^N|\,|v^N|\,. \tag{4.4.16}$$

Заметим теперь, что

$$|w^N| = |w| = |v - \mu\, e_0| \leq 1 + |\mu|\,,$$

а, с другой стороны,

$$0 = \langle w, e_0^T\rangle = \langle v, e_0^T\rangle - |e_0^T|^2\mu$$

и, следовательно,

$$\mu = \frac{\langle v, e_0^T\rangle}{|e_0^T|^2}\,.$$

Отсюда, приходим к оценке

$$|\mu| = \frac{|\langle v, e_0^T\rangle|}{|e_0^T|^2} \leq \frac{|v|\,|e_0^T|}{|e_0^T|^2} = \frac{1}{|e_0^T|}\,. \tag{4.4.17}$$

В силу нашего выбора,

$$\theta(e_0, T_m) \leq \theta(e_0, \gamma) + \theta(\gamma, T_m) < \alpha + \varepsilon < \frac{\pi}{2}\,,$$

и, таким образом,

$$|e_0^{T_m}| = \cos\,\theta(e_0, T_m) \geq \cos(\alpha + \varepsilon) > 0\,.$$

Неравенство (4.4.17) принимает вид

$$|\mu| \leq \left(\cos(\alpha + \varepsilon)\right)^{-1}\,,$$

что вместе с (4.4.16) приводит к оценке

$$\begin{aligned} 1 \leq |v^N|\,(1 + |\mu|) \ &\leq (1 - |v^T|^2)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha+\varepsilon)}\right) \leq \\ &\leq \sin\,\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha+\varepsilon)}\right)\,. \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

Как видно из (4.4.18), при надлежащем выборе $\varepsilon > 0$ мы приходим к противоречию, поскольку правая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой.

Итак, выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\sin\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha + \varepsilon)}\right) < 1\,.$$

Тогда для всякой точки $m \in \Gamma_\varepsilon$ величина $\langle v, \tau(m)\rangle \neq 0$, а потому скалярное произведение $\langle v, \tau(m)\rangle$ сохраняет знак на Γ_ε и, например, положительно.

Рассмотрим координатную функцию $g(m) = \langle v, u(m)\rangle$ с направляющим вектором v и градиентом $\nabla g = v^{T_m}$. Тогда при $m \in \Gamma_\varepsilon$ имеем

$$\langle \nabla g, \tau(m)\rangle = \langle v^{T_m}, \tau(m)\rangle = \langle v, \tau(m)\rangle > 0\,.$$

Интегрируя это неравенство вдоль Γ_ε, находим

$$0 < \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \langle \nabla g, \tau(m)\rangle\,|du| = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} dg(m) = 0\,.$$

Противоречие. Теорема доказана полностью. $\square$

Задача 4.4.19 *Сформулировать и доказать соответствующее утверждение для минимальных лент.*

Глава 5

Лемма Морри

Хорошо известная лемма Морри распространяется на случай $W^{1,p}$–функций на римановых многообразиях.

5.1 Непрерывность по Гельдеру функций на компактах

5.1.1 Постановка задачи

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}$, $p \geq 1$, – функция. Хорошо известно, что каждое из следующих условий достаточно для непрерывности по Гельдеру функции $f(x)$ внутри D :

$i)$ $p > n$ (следствие леммы Морри [215] и частный случай теоремы вложения В.И. Кондрашова [105, §11]);

$ii)$ для всякого компакта $K \subset D$ существуют постоянные $\alpha, C > 0$, $d_0 \leq \operatorname{dist}(K, \partial D)$, такие, что

$$\int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq C\, r^{n-p+\alpha}, \quad \forall a \in K,\ \forall r \leq d_0, \tag{5.1.1}$$

(лемма Морри).

Заметим, что условия $i)$ и $ii)$ приводят к конкретным выражениям для показателя и постоянной в неравенстве Гельдера, равномерных на компактных подмножествах D.

Лемма Морри имеет широкие применения в исследованиях вариационных проблем для функционалов типа интеграла Дирихле, в вопросах регулярности обобщенных решений дифференциальных уравнений с частными производными, отображений с ограниченным искажением $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Отметим ключевую роль леммы Морри в некоторых вариантах доказательств таких важнейших результатов теории дифференциальных уравнений как неравенство Гарнака для положительных решений, теорема Лиувилля и др.

Ниже мы предлагаем формулировки, распространяющие лемму Морри на случай римановых многообразий $\mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X} = n$.

Заметим сначала, что мы формулируем результат для L^p-функций $\rho \geq 0$ вместо $W^{1,p}$-функций. Как следствие, мы записываем условие (5.1.1) в виде оценки роста интеграла

$$I(a, r) = \int\limits_{B(a,r)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}},$$

где a – произвольная точка компактного множества $K \subset D$ и $D \subset \mathcal{X}$ есть область.

Вместо оценивания колебания $|f(a_1) - f(a_2)|$ мы будем оценивать величину

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a_1, a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho(x) d\mathcal{H}^1,$$

где $\Gamma(a_1, a_2)$ – семейство локально спрямляемых дуг γ, соединяющих точки a_1, a_2 и содержащихся в области $D(a_1, a_2) = B(a_1, d_0) \cup B(a_2, d_0)$, а d_0 есть геодезическое расстояние между точками a_1, a_2.

Специальный выбор $\rho(x) = |\nabla f(x)|$, где $f \in W^{1,p}$ приводит к стандартной форме леммы Морри.

Мы рассматриваем две версии леммы Морри. Первая из них связана со стандартным условием

$$I(a, r) \leq C r^{n-p+\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

вторая – с более сильным требованием относительно монотонности величины

$$\frac{1}{r^{n-p+\beta}} I(a, r), \quad \beta > 0\,. \tag{5.1.2}$$

В последнем случае основное утверждение касается нижней оценки для величины

$$\operatorname{mod}_{p,\beta}\Gamma(a_1,a_2)=\inf_{\rho\geq 0}\frac{\int\limits_{D(a_1,a_2)}\rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma(a_1,a_2)}\int\limits_{\gamma}\rho(x)d\mathcal{H}^1\right)^p}. \tag{5.1.3}$$

С формальной точки зрения величина $\operatorname{mod}_{p,\beta}\Gamma(a_1,a_2)$ выглядит в точности так же, как и выражение для $p-$модуля семейства $\Gamma(a_1,a_2)$. Главное отличие величины (5.1.3) от стандартного выражения для $p-$модуля семейства $\Gamma(a_1,a_2)$ состоит в ограничении на класс допустимых функций $\rho(x)\geq 0$, где величина (5.1.2) в последнем случае обязана быть неубывающей. Если обычный $p-$модуль семейства $\Gamma(a_1,a_2)$ обращается в нуль при $p\leq n$, то $\operatorname{mod}_{p,\beta}\Gamma(a_1,a_2)>0$ при любом $p\geq 1$.

Мы будем использовать это свойство при получении граничного варианта леммы Морри. Величина (5.1.3) является внутренней характеристикой многообразия $\mathcal{X}$ в области $D(a_1,a_2)$. Мы постулируем необходимое свойство многообразия в терминах $(p,\beta)-$модуля. Весьма простые условия на поведение $(p,\beta)-$модуля $\Gamma(a_1,a_2)$ влечет общий признак непрерывности по Гельдеру $W^{1,p}-$функций вплоть до границы области $D\subset\mathcal{X}$.

Используемый метод концептуально близок к емкостному подходу Мазьи [65, §5.1] получения гельдеровских оценок для $W^{1,p}-$функций при $p>n$ в областях $D\subset\mathbb{R}^n$. Однако, описываемый ниже подход имеет более универсальный характер.

5.1.2 Точная формулировка

Пусть $\mathcal{X}$ – $n-$мерное многообразие класса C^3 без края. Как и выше, для произвольной точки $x\in\mathcal{X}$ символом T_x обозначается касательное пространство в точке x, символом $T(\mathcal{X})$ – касательное расслоение над $\mathcal{X}$.

Пусть $d(x',x'')$ – расстояние между точками $x',x''\in\mathcal{X}$. Как и выше, символы

$$B(a,t)=\{x\in\mathcal{X}:d(a,x)<t\},\quad \Sigma(a,t)=\{x\in\mathcal{X}:d(a,x)=t\}$$

пусть означают геодезический шар и геодезическую сферу, соответственно, с центрами в точке $a \in \mathcal{X}$ и радиусами $t > 0$.

Зафиксируем произвольно точку $a \in \mathcal{X}$ и постоянную $\delta > 0$.

В формулируемых ниже утверждениях мы предполагаем выполненными следующие гипотезы относительно структуры многообразия $\mathcal{X}$ в окрестности точки $a \in \mathcal{X}$.

a) Пусть $r_{inj}(a)$ обозначает *радиус инъективности экспоненциального отображения* $\exp_a : T_a \to \mathcal{X}$. Мы предполагаем, что $\delta < r_{inj}(a)$.

Из условия a) следует, что в шаре $B(a, \delta)$ могут быть введены полярные координаты (r, θ), $0 \le r \le \delta$, $\theta \in S^{n-1}$, так, что элемент объема $*\mathbb{1}_\mathcal{X}$ имеет вид

$$*\mathbb{1}_\mathcal{X} = G_a(r, \theta) dr d\theta\,, \tag{5.1.4}$$

где $G_a(r, \theta) > 0$ – непрерывная функция [13, §11.10].

b) Существуют непрерывная функция $\Delta(r) > 0$ и положительные постоянные c_1, c_2 такие, что

$$c_1\,\Delta(r) \le G_a(r, \theta) \le c_2\,\Delta(r), \quad \forall\, r \in [0, \delta), \quad \forall\, \theta \in S^{n-1}. \tag{5.1.5}$$

Легко видеть, что условие b) эквивалентно неравенству

$$\max_{\theta \in S^{n-1}} G_a(r, \theta) \le c \min_{\theta \in S^{n-1}} G_a(r, \theta)$$

с некоторой постоянной $c \ge 1$.

c) Площадь

$$S(a, r) = \int\limits_{\Sigma(a,r)} d\mathcal{H}^{n-1} = \int\limits_{S^{n-1}} G_a(r, \theta)\, d\theta, \quad r \in [0, \delta),$$

геодезической сферы $\Sigma(a, r)$ является неубывающей функцией на $[0, \delta)$, и, более того, найдутся постоянные $c_3, c_4 > 0$ такие, что

$$c_3\, r^{n-2} \le S'(a, r) \le c_4\, r^{n-2}, \quad \forall\, r \in [0, \delta). \tag{5.1.6}$$

В дальнейшем, говоря о выполнении предположений a), b), c) в двух или более точках a_1, $a_2, \dots$ (или на множестве точек), мы будем иметь в виду, что условия удовлетворяются с одними и теми же постоянными c_1, c_2, c_3, c_4 и функцией $\Delta(r)$, независимой от точек.

Для произвольной пары точек a_1, $a_2 \in \mathcal{X}$ пусть $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ означает семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \mathcal{X}$, соединяющих a_1 и a_2.

Основной результат раздела состоит в формулируемой ниже версии леммы Морри [207].

Теорема 5.1.1 *Пусть $\rho(x) \geq 0$ – функция класса $L^p_{loc}(\mathcal{X})$, $p \geq 1$, и пусть a_1, $a_2 \in \mathcal{X}$ – пара точек, $d_0 = d(a_1, a_2)$.*

(i) Если многообразие $\mathcal{X}$ обладает свойствами a), b), c) с $\delta = d_0$ в точках a_1, a_2 и если существуют постоянные $\alpha, c_5 > 0$, для которых

$$\int\limits_{B(a_k,r)} \rho^p \; * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq c_5 \, r^{n-p+\alpha}, \quad \forall \, r \in (0, d_0), \; k = 1, 2, \tag{5.1.7}$$

то

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a_1,\, a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^1 \leq c_6 \, d_0^{\,n+\frac{\alpha}{p}} \, / \, \mathcal{H}^n \big(B(a_1, d_0) \cap B(a_2, d_0) \big). \tag{5.1.8}$$

(ii) Если многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям a), b), c) с $\delta = d_0$ в точках a_1, a_2 и если существует постоянная $\beta > 0$ такая, что функция

$$\phi_{a_k}(r) = \frac{1}{r^{n-p+\beta}} \int\limits_{B(a_k,r)} \rho^p \; * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \qquad (k = 1, 2) \tag{5.1.9}$$

не убывает на $(0, d_0)$, то

$$\begin{aligned} & d_0^{\,n-p-pn} \; (\mathcal{H}^n)^p \left(B(a_1, d_0) \cap B(a_2, d_0) \right) \leq \\ & \leq 2^{p+1} \, c_7^p \, \frac{\displaystyle\int\limits_{D(a_1,a_2)} \rho^p \; * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\left(\displaystyle\inf_{\gamma \in \Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \right)^p}, \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

где $D(a_1, a_2) = B(a_1, d_0) \cup B(a_2, d_0)$.

При этом, мы можем положить

$$c_6 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{2}{n+\alpha} \left(1 + \frac{n-1}{\alpha}\left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2\right) c_5^{\frac{1}{p}} \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

и

$$c_7 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_4}{c_3} \left(1 + (n-1)\frac{c_4}{c_3}\frac{p}{\beta}\right) \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p}{pn+\beta}\,.$$

5.1.3 Специальные случаи

Данная теорема содержит, как специальный случай, каждый из приведенных выше признаков локальной непрерывности по Гельдеру функций класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$. Проиллюстрируем это на примере утверждения (i).

Пусть $f \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$, $s > n$. Зафиксируем подобласть $D \subset\subset \mathcal{X}$ и положим

$$\delta(D) = \inf_{\{x_k\}} \liminf_{k\to\infty} d(x_k, D),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным последовательностям $\{x_k\}$, $x_k \in \mathcal{X}$, не имеющим точек сгущения в $\mathcal{X}$.

Выберем точки a_1, $a_2 \in D$ так, чтобы

$$d_0 = d(a_1, a_2) \le \frac{1}{2}\delta(D). \tag{5.1.11}$$

Предположим, что область $D \subset \mathcal{X}$ обладает свойством: существует постоянная $c_8 > 0$, для которой

$$\mathcal{H}^n\big(B(a_1, d_0) \cap B(a_2, d_0)\big) \ge c_8\, d_0^n \tag{5.1.12}$$

при всех a_1, $a_2 \in D$, подчиненных условию (5.1.11).

Покажем, что утверждение (i) влечет равномерную оценку колебания f в области D. Заметим сначала, что выполнение условия (5.1.6) с $\delta = d_0$ влечет соотношение

$$\frac{c_3}{n-1} r^{n-1} \le S(a_k, r) \le \frac{c_4}{n-1} r^{n-1} \qquad (k = 1, 2). \tag{5.1.13}$$

Пользуясь формулой Кронрода – Федерера для ко-площади, получаем

$$\mathcal{H}^n(B(a_k,r)) = \int\limits_0^r dt \int\limits_{\Sigma(a_k,t)} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla d_k|} = \int\limits_0^r S(a_k,t)\,dt \leq \frac{c_4}{n(n-1)} r^n. \quad (5.1.14)$$

Выберем теперь в теореме 5.1.1 $\rho(x) = |\nabla f(x)|$. Находим

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq \inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_\gamma \rho ds_{\mathcal{X}}. \quad (5.1.15)$$

Однако, в силу интегрального неравенства Гельдера при всех $r \leq d_0$ выполнено

$$\left(\int\limits_{B(a_k,r)} |\nabla f| * 1\!\!1_{\mathcal{X}}\right)^s \leq \big(\mathcal{H}^n B(a_k,r)\big)^{s-1} \int\limits_{B(a_k,r)} |\nabla f|^s * 1\!\!1_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{s-1} r^{n(s-1)} \int\limits_{B(a_k,d_0)} |\nabla f|^s * 1\!\!1_{\mathcal{X}}.$$

Тем самым, при $p = 1$ условие (5.1.7) имеет место с постоянными

$$\alpha = \frac{s-n}{s} \quad \text{и} \quad c_5 = \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int\limits_{D'} |\nabla f|^s * 1\!\!1_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{s}},$$

где

$$D' = \{x \in \mathcal{X} : \operatorname{dist}(x,D) \leq \frac{1}{2}\delta(D)\}.$$

На основании (5.1.8) и (5.1.12) приходим к указаннову выше утверждению.

Следствие 5.1.1 *Пусть $f \in W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$, $s > n$, и пусть $D \subset\subset \mathcal{X}$ – произвольная область. Предположим, что в каждой точке $a \in D$ многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям a), b), c) с постоянной $\delta = \frac{1}{2}\delta(D)$ и для* *любой пары точек* $a_1, a_2 \in D$, $d_0 \le \frac{1}{2}\delta(D)$, *выполнено предположение* (5.1.12).

Если a_1, $a_2 \in D$ *и* $d_0 = d(a_1, a_2) \le \frac{1}{2}\delta(D)$, *то*

$$|f(a_1) - f(a_2)| \le c_9\, d^{\frac{s-n}{s}}(a_1, a_2),$$

где

$$c_9 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{2}{n+\alpha}\left(1 + \frac{n-1}{\alpha}(\frac{c_4}{c_3})^2\right)\left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{s-1}{s}} \frac{1}{c_8} I(D'), \quad (5.1.16)$$

$$I(D') = \left(\int\limits_{D'} |\nabla f|^s * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Отсюда легко следует хорошо известная лемма Морри.

Следствие 5.1.2 *Пусть* $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$, $p \ge 1$, *и пусть* $D \subset\subset \mathcal{X}$ *– произвольная область. Предположим, что в каждой точке* $a \in D$ *многообразие* $\mathcal{X}$ *удовлетворяет предположениям* a), b), c) *с постоянной* $\delta = \frac{1}{2}\delta(D)$ *и для всякой пары точек* $a_1, a_2 \in D$ *с условием* (5.1.11) *выполнено* (5.1.12).

Если для каждой точки $a \in D$ *и любого* $r \le \frac{1}{2}\delta(D)$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le c_5\, r^{n-p+\alpha}, \qquad (5.1.17)$$

то

$$|f(a_1) - f(a_2)| \le \frac{c_6}{c_8} d^{\alpha}(a_1, a_2),$$

где c_6 *– постоянная из теоремы* 5.1.1.

Для **доказательства** выберем в теореме 5.1.1 функцию

$$\rho(x) = |\nabla f(x)|\,.$$

На основании (5.1.15), (5.1.12) и (5.1.8) получаем

$$|f(a_1) - f(a_2)| \le c_6\, d_0^{\,n+\frac{\alpha}{p}} \,/\, \mathcal{H}^n\big(B(a_1, d_0) \cap B(a_2, d_0)\big) \le \frac{c_6}{c_8} d_0^{\frac{\alpha}{p}},$$

что и требуется. □

5.1.4 Доказательство теоремы 5.1.1

Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Пусть $Q = B(a_1, d_0) \cap B(a_2, d_0)$. Обозначим через $l_k(x)$ геодезический сегмент, соединяющий точку a_k $(k = 1, 2)$ с точкой $x \in Q$. Так как для радиуса инъективности экспоненциального отображения $\exp_{a_k} : T_{a_k} \to \mathcal{X}$ выполнено $r_{inj}(a_k) > d_0$, эти геодезические сегменты $l_k(x)$ суть кратчайшие из дуг, связывающих концевые точки и содержащиеся в $B(a_k, d_0)$.

Мы имеем

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \le \mathcal{R}(\Gamma) \equiv \inf_{x \in Q} \left(\int\limits_{l_1(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} + \int\limits_{l_2(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \right) \qquad (5.1.18)$$

и, далее,

$$\mathcal{R}(\Gamma) \int\limits_{Q} *\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \int\limits_{Q} *\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \int\limits_{l_1(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} + \int\limits_{Q} *\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \int\limits_{l_2(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \int\limits_{B(a_1,d_0)} *\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \int\limits_{l_1(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} + \int\limits_{B(a_2,d_0)} *\mathbb{1}_{\mathcal{X}} \int\limits_{l_2(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \equiv I_1 + I_2. \qquad (5.1.19)$$

Каждый из интегралов I_1, I_2 оценивается одинаково. Применив формулу Кронрода – Федерера и заметив, что

$$|\nabla_x d(a_k, x)| \equiv 1 \quad \text{на } B(a_k, d_0),$$

пользуясь (5.1.4), приходим к оценке

$$I_1 = \int\limits_0^{d_0} dr \int\limits_{\Sigma(a_1,r)} d\mathcal{H}^{n-1} \int\limits_{l_1(x)} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} = \int\limits_0^{d_0} dr \int\limits_{S^{n-1}} G_1(r,\theta) d\theta \int\limits_0^r \rho(t,\theta) dt,$$

где $G_1(r,\theta) = G_{a_1}(r,\theta)$.

Данное соотношение вместе с (5.1.5) влекут

$$I_1 \le c_2 \int\limits_0^{d_0} \Delta(r) dr \int\limits_{S^{n-1}} d\theta \int\limits_0^r \rho(t,\theta) dt =$$

$$= c_2 \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_0^r dt \int\limits_{S^{n-1}} \rho(t,\theta)d\theta. \tag{5.1.20}$$

Положим

$$J(r) = \int\limits_{B(a_1,r)} \rho * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Тогда

$$J(r) = \int\limits_0^r dt \int\limits_{S^{n-1}} G_1(t,\theta)\rho(t,\theta)d\theta,$$

и для почти всех $r \in [0, d_0)$, согласно (5.1.5) находим

$$J'(r) = \int\limits_{S^{n-1}} G_1(r,\theta)\rho(r,\theta)d\theta \geq c_1\, \Delta(r) \int\limits_{S^{n-1}} \rho(r,\theta)d\theta.$$

Таким образом, в силу (5.1.20) получаем

$$I_1 \leq c_2 \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_0^r \frac{J'(t)}{c_1\Delta(t)}dt = \frac{c_2}{c_1} \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_0^r \frac{J'(t)}{\Delta(t)}dt.$$

Однако, соотношение (5.1.5) дает

$$\frac{1}{c_2\omega_{n-1}} S_1(r) \leq \Delta(r) \leq \frac{1}{c_1\omega_{n-1}} S_1(r),$$

где $S_1(r) = S(a_1, r)$ и ω_{n-1} – площадь $S^{n-1}(1)$.

Пользуясь предыдущим неравенством, получаем

$$I_1 \leq \Big(\frac{c_2}{c_1}\Big)^2 \int\limits_0^{d_0} S_1(r)dr \int\limits_0^r \frac{J'(t)}{S_1(t)}dt. \tag{5.1.21}$$

Далее заметим, что

$$\int\limits_0^r \frac{J'(t)}{S_1(t)}dt = \frac{J(t)}{S_1(t)}\Big|_0^r + \int\limits_0^r \frac{J(t)}{S_1^2(t)} S_1'(t)dt. \tag{5.1.22}$$

Остальные аргументы в случаях (i) и (ii) мало отличаются друг от друга. Докажем сначала утверждение (i) для $p = 1$. В силу (5.1.7), получаем

$$J(r) \leq c_5\, r^{n-1+\alpha}, \qquad \forall\, r \in [0, d_0). \tag{5.1.23}$$

Тем самым, из (5.1.13) мы видим, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(t)}{S_1(t)} = 0,$$

и соотношение (5.1.22) дает

$$\int\limits_0^r \frac{J'(t)}{S_1(t)}dt = \frac{J(r)}{S_1(r)} + \int\limits_0^r \frac{J(t)}{S_1^2(t)}S_1'(t)dt. \tag{5.1.24}$$

На основании (5.1.21) и (5.1.24) находим

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 I_1 \leq \int\limits_0^{d_0} J(r)dr + \int\limits_0^{d_0} S_1(r)dr \int\limits_0^r \frac{J(t)}{S_1^2(t)}S_1'(t)dt. \tag{5.1.25}$$

Оценка (5.1.23) влечет

$$\int\limits_0^{d_0} J(r)dr \leq \frac{c_5}{n+\alpha}\, d_0^{n+\alpha}. \tag{5.1.26}$$

Так как согласно предположению $c)$ производная $S_1'(t)$ является неотрицательной, на основании (5.1.6), (5.1.13) и (5.1.23) получаем

$$\int\limits_0^{d_0} S_1(r)dr \int\limits_0^r \frac{J(t)}{S_1^2(t)}S_1'(t)dt \leq \frac{c_4}{n-1}\int\limits_0^{d_0} r^{n-1}dr \int\limits_0^r \frac{c_5 t^{n-1+\alpha}}{(\frac{c_3}{n-1}t^{n-1})^2}c_4 t^{n-2}dt =$$

$$= \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 c_5 \frac{n-1}{\alpha(n+\alpha)} d_0^{n+\alpha}. \tag{5.1.27}$$

Объединяя оценки (5.1.25) – (5.1.27), приходим к неравенству

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 I_1 \leq \frac{c_5}{n+\alpha} d_0^{n+\alpha} + \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 c_5 \frac{n-1}{\alpha(n+\alpha)} d_0^{n+\alpha} =$$

$$= \frac{c_5}{n+\alpha} \left(1 + \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 \frac{n-1}{\alpha}\right) d_0^{n+\alpha}.$$

Те же аргументы справедливы также и для интеграла I_2. Таким образом, на основании (5.1.19) находим

$$\mathcal{R}\,(\Gamma)\mathcal{H}^n(Q) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{2c_5}{n+\alpha} \left(1 + \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 \frac{n-1}{\alpha}\right) d_0^{n+\alpha}. \tag{5.1.28}$$

Пользуясь (5.1.18), легко убеждаемся в справедливости утверждения (i) при $p = 1$.

Доказательство справедливости (i) при $p > 1$ весьма несложно. На основании интегрального неравенства Гельдера, для $k = 1, 2$ имеем

$$\int\limits_{B(a_k,r)} \rho * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\mathcal{H}^n\left(B(a_k,r)\right)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{B(a_k,r)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем самым, пользуясь соотношениями (5.1.14) и (5.1.7), приходим к оценке

$$\int\limits_{B(a_k,r)} \rho * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} c_5^{\frac{1}{p}} r^{n-1+\frac{\alpha}{p}}.$$

Теперь мы имеем возможность применить утверждение (i) для $p = 1$. Тем самым, применив неравенство (5.1.28), получаем

$$\mathcal{R}(\Gamma)\mathcal{H}^n(Q) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{2c_5^{\frac{1}{p}}}{n+\alpha} \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1 + \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^2 \frac{n-1}{\alpha}\right) d_0^{n+\frac{\alpha}{p}},$$

что доказывает (5.1.8) в общем случае.

Приступим к доказательству утверждения (ii). Заметим, что

$$J(r) = \int\limits_{B(a_1,r)} \rho * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \left(\int\limits_0^r S_1(t)dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{B(a_1,r)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В силу (5.1.13), имеем

$$\int\limits_0^r S_1(t)dt \le \frac{c_4}{n(n-1)}\, r^n, \qquad r \in (0, d_0).$$

С другой стороны, условие монотонности (5.1.9) влечет

$$\frac{1}{r^{n-p+\beta}} \int\limits_{B(a_1,r)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le K, \quad K = \frac{1}{d_0^{n-p+\beta}} \int\limits_{B(a_1,d_0)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Отсюда находим

$$J(r) \le \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} K^{\frac{1}{p}}\, r^{n-1+\frac{\beta}{p}}$$

и, в частности,

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(t)}{S_1(t)} = 0.$$

Таким образом, на основании (5.1.22), (5.1.6) и (5.1.13), приходим к оценке

$$\int\limits_0^r \frac{J'(t)}{S_1(t)}dt = \frac{J(r)}{S_1(r)} + \int\limits_0^r \frac{J(t)}{S_1^2(t)} S_1'(t)\, dt \le$$

$$\le \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} K^{\frac{1}{p}} \frac{n-1}{c_3}\, r^{\frac{\beta}{p}} \big(1 + (n-1)\frac{c_4}{c_3}\frac{p}{\beta}\big).$$

Тем самым, из (5.1.21) следует

$$I_1 \le \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left(\frac{c_4}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(1 + (n-1)\frac{c_4}{c_3}\frac{p}{\beta}\right) \frac{c_4}{c_3} \frac{p}{pn+\beta}\, d_0^{\frac{pn+\beta}{p}}\, K^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогичные оценки имеют место для интеграла I_2. Объединяя найденные оценки с (5.1.19), приходим к соотношению

$$\mathcal{R}(\Gamma)\,\mathcal{H}^n(Q) \le c_7 d_0^{n+1-\frac{n}{p}} \sum_{k=1}^{2} \left(\int\limits_{B(a_k,d_0)} \rho^p \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2^{1+\frac{1}{p}}\, c_7\, d_0^{n+1-\frac{n}{p}} \left(\int\limits_{D(a_1,a_2)} \rho^p \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

и, пользуясь (5.1.18), устанавливаем (5.1.10).

Доказательство теоремы 5.1.1 полностью завершено. $\square$

5.2 Приложения

5.2.1 Ключевая лемма

Укажем приложения полученных результатов к квазилинейным уравнениям с частными производными эллиптического типа на римановых многообразиях.

Пусть $\mathcal{X}$ – риманово многообразие и пусть f – обобщенное решение класса $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathcal{X})$ уравнения (2.2.18), подчиненного ограничениям (2.2.15), (2.2.16).

Пусть $a \in \mathcal{X}$ – фиксированная точка и пусть $\Sigma(a,r) \subset \mathcal{X}$ – геодезическая сфера и $0 < r < \operatorname{dist}(a, \partial\mathcal{X})$, если край $\partial\mathcal{X}$ не пуст.

Определим величину

$$\mu(a,r) = \inf_{\psi} \frac{\left(\int\limits_{\Sigma(a,r)} |\nabla_{\Sigma}\psi|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\inf\limits_{C} \int\limits_{\Sigma(a,r)} |\psi - C|^p d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad C \equiv \mathrm{const}, \tag{5.2.1}$$

где $\nabla_{\Sigma}\psi$ означает градиент функции ψ на $\Sigma(a,r)$ и точная нижняя грань берется по всем функциям $\psi \in W^{1,p}(\Sigma(a,r))$.

Рассмотрим уравнение (2.2.18) со структурными постоянными (2.2.15) – (2.2.16). Для произвольной точки $a \in \mathcal{X}$ и произвольного $\delta < r_{inj}(a)$ полагаем

$$\beta(a,\delta) = c_{10}\, c_{11} - n + p,$$

где

$$c_{10} = \inf_{r\in(0,\delta)} r\, \mu(a,r)$$

и

$$c_{11} = p(p-1)^{\frac{1-p}{p}} \left(1 + \sqrt{\nu^2 - 1}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(2^{1-\frac{p}{2}} + \sqrt{\nu^2-1}\right)^{-1}, \quad (p < 2),$$

$$c_{11} = \frac{p}{p-1}\left(1 + \sqrt{\nu^2 - 1}\right)^{-\frac{p+1}{p}}, \quad (p \geq 2).$$

Лемма 5.2.1 *Пусть* f *– обобщенное решение уравнения* (2.2.18) *со структурными постоянными* (2.2.15)–(2.2.16). *Тогда для всякой точки* $a \in \mathcal{X}$ *и всякого* $\delta < r_{inj}(a)$ *функция*

$$\phi_a(r) = \frac{1}{r^{n-p+\beta}} \int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

не убывает на $(0, \delta)$.

Доказательство утверждения будет дано несколько позже.

5.2.2 Непрерывность по Гельдеру решений

Остановимся сначала на одном типичном применении леммы Морри, связанном с непрерывностью по Гельдеру A−гармонических функций на многообразиях. В евклидовом случае соответствующие результаты для A−решений даны в [189] и для A−субрешений — в [188].

Для $\mathcal{WT}$-форм соответствующие результаты получены в диссертации Д. Франке [154], для отображений, близких к квазиизометриям, см. ниже в разделе 8.1.

Теорема 5.2.1 *Пусть* $D \subset\subset \mathcal{X}$ *– область в* n*-мерном римановом многообразии* $\mathcal{X}$. *Предположим, что в каждой точке* $a \in D$ *многообразие* $\mathcal{X}$ *удовлетворяет условиям* a), b), c) *с постоянной* $\delta = \frac{1}{2}\delta(D)$ *и для каждой пары точек* $a_1, a_2 \in D$ *со свойством* (5.1.11) *выполнено* (5.1.12).

Пусть f *– обобщенное решение уравнения* (2.2.18) *со структурными постоянными* (2.2.15), (2.2.16).

Если величина $\beta = \beta(a, \delta) > 0$ *при всех* $a \in D$, *то*

$$|f(a_1) - f(a_2)| \le \frac{c_6}{c_8}\, d^\beta(a_1, a_2), \quad \forall\, a_1, a_2 \in D,\ d(a_1, a_2) < \delta. \tag{5.2.2}$$

Здесь c_6 *– постоянная из теоремы* 5.1.1 *и*

$$c_5 = \frac{1}{\delta^{n-p+\beta}} \int\limits_{D'} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Доказательство легко следует из аргументов, приведенных выше. По лемме 5.2.1 в каждой точке $a \in D$ имеем

$$\int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \frac{r^{n-p+\beta}}{\delta^{n-p+\beta}} \int\limits_{B(a,\delta)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \quad r \le \delta.$$

Таким образом, используя предположение (5.1.6), получаем

$$\int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le c_5\, r^{n-p+\beta}.$$

Неравенство (5.1.17) имеет место с указанной выше постоянной c_5. Следствие 5.1.2 ведет к оценке (5.2.2). □

Доказательство леммы 5.2.1. Зафиксируем точку $a \in \mathcal{X}$. Нам нужно доказать, что для некоторого $\beta > 1$ производная $\phi_a'(r) \ge 0$ почти всюду на интервале $(0, \delta)$. Так как для почти всех $r \in (0, \delta)$ выполнено

$$\frac{d}{dr} \int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p \; * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{\Sigma(a,r)} |\nabla f|^p \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

то условие $\phi_a'(r) \ge 0$ эквивалентно неравенству

$$(n - p + \beta) \int\limits_{B(a,r)} |\nabla f|^p \; * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le r \int\limits_{\Sigma(a,r)} |\nabla f|^p \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{5.2.3}$$

Фиксируем $r_0 \in (0, \delta)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $r_0 + \varepsilon < \delta$. Положим

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t < r_0 \\ 1 + \dfrac{r_0}{\varepsilon} - \dfrac{t}{\varepsilon} & \text{при} \quad t \in [r_0, r_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{при} \quad t > r_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Для произвольной постоянной C функция $\phi(d(a, x))\,(f(x) - C)$ принадлежит классу $W^{1,p}$ и обращается в нуль при $x \in \mathcal{X} \setminus B(a, r_0 + \varepsilon)$. Таким образом, в силу интегрального тождества (2.2.19), мы вправе написать

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \phi(d(a,x))\langle \nabla f, A(x,\nabla f)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{X}} (f(x)-C)\,\phi'(d(a,x))\,\langle \nabla d(a,x), A(x,\nabla f)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Так как $\phi(d(a,x)) \equiv 1$ на $B(a,r_0)$ и

$$\phi(d(a,x)) \equiv 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{X}\setminus B(a,r_0+\varepsilon)\,,$$

то мы имеем

$$\int\limits_{B(a,r_0+\varepsilon)} \phi(d(a,x))\langle \nabla f, A(x,\nabla f)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \int\limits_{r_0<d(a,x)<r_0+\varepsilon} |f(x)-C|\,|\phi'(d(a,x))|\,|\langle \nabla d(a,x), A(x,\nabla f)\rangle| * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

В силу структурного условия (2.2.16), находим

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{r_0}^{r_0+\varepsilon} dt \int\limits_{\Sigma(a,t)} |f(x)-C|\,|\langle \nabla d(a,x), A(x,\nabla f)\rangle|\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x)-C|\,|\langle \nabla d(a,x), A(x,\nabla f)\rangle|\,d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{5.2.4}$$

что имеет место для почти всех $r_0 \in (0,\delta)$.

Приступим к оценке последнего из интегралов в неравенстве (5.2.4). Мы воспользуемся идеей из [72], использованной для похожей оценки в $\mathbb{R}^n$. Заметим сначала, что векторное поле $\nabla d(a,x)$ ортогонально геодезической сфере $\Sigma(a,r_0)$ в каждой точке $x \in \Sigma(a,r_0)$, где вектор $\nabla d(a,x)$

существует. Так как $|\nabla d(a,x)| \equiv 1$, то в каждой точке дифференцируемости решения f имеем

$$|\nabla_{\Sigma} f(x)|^2 + |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^2 = |\nabla f(x)|^2. \tag{5.2.5}$$

Структурные условия (2.2.15) и (2.2.16) влекут

$$|\langle \nabla d(a,x), A(x, \nabla f)\rangle| \le$$

$$\le \nu_1 \, |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle| \, |\nabla f(x)|^{p-2} + \nu_3 \, |\nabla f(x)|^{p-1}, \tag{5.2.6}$$

где $\nu_3 = \sqrt{\nu_2^2 - \nu_1^2}$.

Чтобы убедиться в справедливости данного неравенства, заметим сначала, что

$$\langle \nabla d(a,x), A\rangle = \langle \nabla d(a,x), \nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \nabla f\rangle + \langle \nabla d(a,x), A - \nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \nabla f\rangle.$$

Отсюда,

$$|\langle \nabla d(a,x), A\rangle| \le \nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \, |\langle \nabla d(a,x), \nabla f\rangle| + \tag{5.2.7}$$

$$+ |A - \nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \nabla f|.$$

Пользуясь соотношениями (2.2.15), (2.2.16), получаем

$$|A - \nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \, \nabla f|^2 = |A|^2 - 2\nu_1 \, |\nabla f|^{p-2} \langle A, \nabla f\rangle + \nu_1^2 \, |\nabla f|^{2(p-1)} \le$$

$$\le (\nu_2^2 - \nu_1^2) \, |\nabla f|^{2(p-1)} = \nu_3^2 \, |\nabla f|^{2(p-1)},$$

и, в силу (5.2.7), приходим к (5.2.6).

На основании (5.2.4) и (5.2.6) получаем

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \tag{5.2.8}$$

$$\le \nu_1 \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x) - C| \, |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle| \, |\nabla f(x)|^{p-2} d\mathcal{H}^{n-1} +$$

$$+ \nu_3 \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x) - C| \, |\nabla f(x)|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1} \equiv \nu_1 \, I_1 + \nu_3 \, I_2.$$

Заметим теперь, что неравенство

$$a\,b \le \frac{\varepsilon^p}{p}a^p + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\,b^{\frac{p}{p-1}}, \quad a,\, b \ge 0,$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольно, ведет к оценке

$$I_1 \le \frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x) - C|^p\, d\mathcal{H}^{n-1} +$$

$$+\frac{p-1}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f\rangle|^{\frac{p}{p-1}} |\nabla f(x)|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}\, d\mathcal{H}^{n-1} \equiv$$

$$\equiv \frac{\varepsilon^p}{p}\, J_1 + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\, J_2.$$

В точности тем же самым путем получаем

$$I_2 \le \frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x) - C|^p\, d\mathcal{H}^{p-1} +$$

$$+\frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p\, d\mathcal{H}^{n-1} \equiv$$

$$\equiv \frac{\varepsilon^p}{p}\, J_1 + \frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\, J_3.$$

Таким образом, в силу (5.2.8) имеем

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p \,*\, \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le \tag{5.2.9}$$

$$\le \frac{\varepsilon^p}{p}(\nu_1 + \nu_3) J_1 + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\nu_1 J_2 + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{-\frac{p}{p-1}}\nu_3 J_3.$$

Выбирая здесь постоянную C наилучшей, согласно (5.2.1) получаем

$$J_1 = \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |f(x) - C|^p\, d\mathcal{H}^{n-1} \le \frac{1}{\mu^p(a,r_0)} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla_\Sigma f|^p\, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{5.2.10}$$

Оценку интеграла J_2 проведем раздельно в случаях $p < 2$ и $p \geq 2$. Пусть $p < 2$. Соотношение (5.2.5) влечет

$$|\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle| \leq |\nabla f(x)|.$$

Таким образом,

$$|\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^{\frac{p}{p-1}}\,|\nabla f(x)|^{\frac{p(p-2)}{p-1}} \leq |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p$$

и мы находим

$$J_2 \leq \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (p < 2). \tag{5.2.11}$$

Положим

$$\varepsilon = \left(\left(\frac{(p-1)\nu_1}{\nu_1+\nu_3}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(a,r_0)\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Объединяя (5.2.9) – (5.2.11), приходим к оценке

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{p} \nu_1^{\frac{p-1}{p}} (\nu_1+\nu_3)^{\frac{1}{p}} \mu^{-1}(a,r_0) \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla_\Sigma f|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f\rangle|^p d\mathcal{H}^{n-1}\right) +$$

$$+ \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{p} \left(\frac{\nu_1+\nu_3}{\nu_1}\right)^{\frac{1}{p}} \nu_3\, \mu^{-1}(a,r_0)\, J_3\,.$$

Поскольку $p < 2$, то мы вправе воспользоваться неравенством

$$a^p + b^p \leq 2^{1-\frac{p}{2}}(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}, \quad a,b \geq 0\,.$$

В силу (5.2.5), имеем

$$|\nabla_\Sigma f(x)|^p + |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p \leq 2^{1-\frac{p}{2}} |\nabla f(x)|^p.$$

Отсюда заключаем, что

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq (\nu_1+\nu_3)^{\frac{1}{p}} \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{p} \big(2^{1-\frac{p}{2}} \nu_1^{\frac{p-1}{p}} + \nu_1^{-\frac{1}{p}} \nu_3\big)\, \mu^{-1}(a,r_0)\, J_3,$$

или

$$c_{11} \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq c_{10}\, r_0 \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{5.2.12}$$

где постоянные c_{10}, c_{11} определены в лемме.

Те же аргументы показывают, что при $p<2$ неравенство (5.2.3) имеет место с постоянной $\beta = c_{10}\, c_{11} - n + p$.

Пусть $p \geq 2$. Применяя неравенство

$$ab \leq \frac{1}{p-1} a^{p-1} + \frac{p-2}{p-1} b^{\frac{p-1}{p-2}}, \quad a, b \geq 0,$$

получаем

$$|\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^{\frac{p}{p-1}}\, |\nabla f(x)|^{\frac{p(p-2)}{p-1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{p-1} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p + \frac{p-2}{p-1}\, |\nabla f(x)|^p.$$

Тем самым, приходим к оценке

$$J_2 \leq \frac{1}{p-1} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{p-2}{p-1}\, J_3. \tag{5.2.13}$$

Объединяя неравенства (5.2.9), (5.2.10), (5.2.13), получаем

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \frac{\varepsilon^p}{\mu^p(a,r_0)} \frac{\nu_1+\nu_3}{p} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla_\Sigma f|^p d\mathcal{H}^{n-1} +$$

$$+ \frac{\nu_1}{p} \varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \big(\frac{p-2}{p}\nu_1 + \frac{p-1}{p}\nu_3\big) \varepsilon^{-\frac{p}{p-1}} J_3.$$

Полагая

$$\varepsilon = \left(\left(\frac{\nu_1}{\nu_1+\nu_3}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(a,r_0)\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

теперь имеем

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p \ * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \frac{\nu_1^{1-\frac{1}{p}}}{p\mu(a,r_0)}(\nu_1+\nu_3)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla_\Sigma f|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p d\mathcal{H}^{n-1} \right) +$$

$$+ \frac{1}{p\mu(a,r_0)}(\frac{\nu_1+\nu_3}{\nu_1})^{\frac{1}{p}} \big((p-2)\nu_1 + (p-1)\nu_3\big) J_3.$$

Но $p \geq 2$, а потому

$$|\nabla f(x)|^p + |\langle \nabla d(a,x), \nabla f(x)\rangle|^p \leq |\nabla f(x)|^p,$$

и, далее,

$$\nu_1 \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p \ * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \frac{p-1}{p}(\frac{\nu_1+\nu_3}{\nu_1})^{\frac{1}{p}}(\nu_1+\nu_3)\mu^{-1}(a,r_0) \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Тем самым,

$$c_{11} \int\limits_{B(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p \ * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \mu^{-1}(a,r_0) \int\limits_{\Sigma(a,r_0)} |\nabla f(x)|^p d\mathcal{H}^{n-1},$$

где постоянная c_{11} определена в лемме.

Рассуждая, как и выше, приходим к (5.2.12) и, далее, к (5.2.3). Доказательство леммы 5.2.1 полностью завершено. $\square$

5.2.3 Непрерывность по Гельдеру форм

Вопросы непрерывности по Гельдеру дифференциальных форм рассматривались в диссертации Д. Франке (см. [154, раздел **11**]). Ниже мы кратко описывам основные результаты этой работы, предоставляя восстановление доказательств заинтересованному читателю.

Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное риманово многообразие, $D \subset \mathcal{X}$ – область и пусть $\Gamma = \Gamma(a, b)$ – семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset D$, соединяющих точки a, $b \in D$.

Определение 5.2.1 *Пусть ω – дифференциальная форма степени k, $0 \le \deg \omega = k \le n$, $d\omega \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$. Форма ω непрерывна по Гельдеру в области D с показателем α, $0 < \alpha \le 1$, если существует постоянная $C(D)$ такая, что для любой пары точек a, $b \in D$ выполнено*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a,b)} \int\limits_{\gamma} |d\,\omega|\, ds_{\mathcal{X}} \le C(D)\, d^{\alpha}_{\mathcal{X}}(a, b)\,. \tag{5.2.14}$$

Форма ω непрерывна по Гельдеру локально в D с показателем $\alpha \in (0, 1]$, если она подчинена условию (5.2.14) на любой подобласти $D' \subset\subset D$.

Если дифференциальная форма ω имеет степень $\deg \omega = 0$, т.е. ω является функцией, то, как нетрудно видеть,

$$|\omega(b) - \omega(a)| \le \inf_{\gamma \in \Gamma(a,b)} \int\limits_{\gamma} |d\omega|\, ds_{\mathcal{X}}$$

и функция ω удовлетворяет условию Гельдера в традиционном смысле.

Если дифференциальная форма ω, $\deg \omega > 0$, и если ω_0 – произвольная замкнутая дифференциальная форма класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, то (проверить !)

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a,b)} \int\limits_{\gamma} |d\omega - d\omega_0|\, ds_{\mathcal{X}} = \inf_{\gamma \in \Gamma(a,b)} \int\limits_{\gamma} |d\omega|\, ds_{\mathcal{X}}\,.$$

Это означает, что условие Гельдера для $W^{1,p}$-форм определяется с точностью до замкнутых форм, в точности так же, как и для 0-форм (функций).

Теорема Ходжа о декомпозиции дифференциальных форм [182, §6] утверждает, что *для каждой дифференциальной формы*

$$\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \quad 1 < p < \infty\,,$$

найдутся дифференциальные формы

$$\varphi \in \ker\delta \cap L^p_1(\mathbb{R}^n) \quad \textit{и} \quad \psi \in \ker d \cap L^p_1(\mathbb{R}^n)$$

такие, что

$$\omega = d\,\varphi + \delta\,\psi\,.$$

При этом дифференциальные формы φ и ψ определяются единственным образом.

Возвращаясь к условию Гельдера (5.2.14), видим, что данное условие представляет собой некоторое ограничение на козамкнутую часть формы ω. Это же соображение выполнено локально на многообразии.

Ниже приводится признак выполнимости условия Гельдера для форм класса $\mathcal{WT}_2$. При этом мы сохраняем обозначения раздела 5.1.3.

Теорема 5.2.1 *Пусть D – подобласть n-мерного риманова многообразия $\mathcal{X}$. Предположим, что в окрестности каждой точки $a \in D$ многообразия $\mathcal{X}$ выполнены условия a), b), c) раздела* 5.1.2 *и для произвольной пары точек a_1, $a_2 \in D$ со свойством* (5.1.11) *имеет место* (5.1.12).

Пусть ω – дифференциальная форма, обладающая свойством $d\omega \in \mathcal{WT}_2$ в D. Тогда существует постоянная $\beta > 0$ такая, что для любой пары точек a_1, $a_2 \in D$, $d = d_{\mathcal{X}}(a_1, a_2)$, справедлива оценка

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_{\gamma} |d\omega|\, ds_{\mathcal{X}} \le C\, d^{\frac{\beta}{p}}_{\mathcal{X}}(a_1, a_2)\,, \tag{5.2.15}$$

и форма ω удовлетворяет в D условию Гельдера с показателем $\frac{\beta}{p}$.

Доказательство опирается на следующие два утверждения, касающиеся дифференциальных форм класса $\mathcal{WT}_2$.

Лемма 5.2.2 *Если дифференциальная форма $d\omega$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$, то для всякой точки $a \in D$ и любого $\delta \le \delta(D)/2$, $\delta < r_{\mathrm{inj}}(a)$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{B(a,r)} |d\omega|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le C_1 \, r^{n-p+\beta} \quad r \in (0,\delta)\,, \tag{5.2.16}$$

где $\beta > 0$ – некоторая постоянная,

$$C_1 = \frac{1}{n-p+\beta} \int\limits_{D'} |d\omega|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

и $D' = \{x \in \mathcal{X} : \operatorname{dist}(x, D) \le \delta(D)/2\}$.

Лемма 5.2.3 *Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ обладает свойствами a), b), c) раздела 5.1.2 для некоторой постоянной $\delta > 0$. Пусть $a_1, a_2 \in \mathcal{X}$ – пара точек, для которой $d = d(a_1, a_2) \le \delta$. Пусть $\rho \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$ – неотрицательная функция, $p \ge 1$. Если существуют постоянные $\alpha > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что*

$$\int\limits_{B_{\mathcal{X}}(a_k,r)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le C_2 \, r^{n-p+\alpha}\,, \quad r \in (0,d)\,, \ \ k = 1,2\,,$$

то

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho \, ds_{\mathcal{X}} \le C_3 \, \frac{d^{n+\alpha/p}}{\mathcal{H}^n(B_{\mathcal{X}}(a_1,d) \cap B_{\mathcal{X}}(a_2,d))}\,,$$

где $C_3 = C_3(n,p,\alpha;C_2)$ – постоянная.

Доказательства близки, соответственно, к доказательствам теоремы 5.1.1 и леммы 5.2.1. □

Упражнения. *Восстановить доказательства теоремы 5.2.1 и лемм 5.2.2, 5.2.3. В качестве следствия получить оценки показателя и постоянной Гельдера для вектор-функций $(f_1, \ldots, f_k)$, $1 \le k \le n-1$, где*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$$

— отображение с ограниченным искажением.

Сравнить показатель и постоянную в полученном неравенстве Гельдера с ныне имеющимися [99, раздел 1.2].

5.3 Граничные версии

Мы указали признаки непрерывности по Гельдеру в случаях, когда точки $a_1, a_2 \in \mathcal{X}$ суть внутренние точки многообразия. Если многообразие имеет край и если хотя бы одна из точек a_1, a_2 принадлежит краю, то проблема существенно более трудная. Приведенные выше аргументы можно использовать лишь при некоторых дополнительных ограничениях на многообразие. К примеру, предположим, что в граничной точке можно ввести полярные координаты (r, θ) и что окрестность точки содержит конус с вершиной в этой точке фиксированного раствора.

Относительно гельдеровых оценок для $W^{1,p}$-функций вблизи границы области из $\mathbb{R}^n$ см. [65], [186], [32].

5.3.1 Теорема Латфуллина

Приводимый ниже граничный вариант леммы Морри для областей из $\mathbb{R}^n$ был найден Т.Г. Латфуллиным [62].

Пусть $n \geq 2$ и ε, $\delta > 0$. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *(ε, δ) – областью*, если для любых $x, y \in \Omega$, $|x - y| < \delta$, существует спрямляемая дуга $\gamma \subset \Omega$, соединяющая точки x, y и удовлетворяющая условиям

$$l\,(\gamma) \leq \frac{1}{\varepsilon}|x - y|\,, \tag{5.3.1}$$

$$d(z) \geq \frac{\varepsilon\,|x - z|\,|y - z|}{|x - y|}\,, \quad \forall\, z \in \gamma\,. \tag{5.3.2}$$

Здесь $l\,(\gamma) = \mathrm{length}\,(\gamma)$ и $d(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$.

Для произвольного куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ пусть $l(Q)$ означает длину его ребра. *Двоичным* (*бинарным*) кубом в $\mathbb{R}^n$ называется всякий куб Q, ребра которого параллельны осям координат и имеют длину, равную целой степени числа 2, т.е. $l(Q) = 2^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. также ниже раздел 7.2.1).

Лемма 5.3.1 [186] *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество с непустой границей. Существует разложение $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, где каждое слагаемое является замкнутым двоичным кубом, и при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнено*

$$l(S_k) \leq D(S_k, \partial\Omega) \leq 4\sqrt{n}\, l(S_k)\,. \tag{5.3.3}$$

При этом внутренности $S_k^0 = \operatorname{int} S_k$ попарно не пересекаются

$$S_i^0 \cap S_j^0 = \emptyset\,, \quad \textit{если } \; i \neq j\,, \tag{5.3.4}$$

и

$$\frac{1}{4} l(S_j) \leq l(S_i) \leq 4\, l(S_j)\,, \quad \textit{если } \; S_i \cap S_j \neq \emptyset\,. \tag{5.3.5}$$

Представление Ω в виде суммы множеств S_k с указанными свойствами называтся *разбиением Уитни* множества Ω. Детали см. в [106, глава VI], [34, глава I], [32, глава 6].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ есть (ε, δ)-область Джонса. Положим
$W_1 = \{S_i\}$ – разбиение Уитни области D,
$W_2 = \{Q_j\}$ – разбиение Уитни внутренности дополнения $\operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus D)$,
$W_3 = \{Q_j \in W_2 : l(Q_j) \leq \varepsilon\,\delta/(16\,n)\}$.

Лемма 5.3.2 [186] *Если $Q_i \in W_3$, то найдется $S_k \in W_1$ со свойствами*

$$l(Q_i) \leq l(S_k) \leq 4\, l(Q_i)\,, \tag{5.3.6}$$

$$d(Q_i, S_k) \leq C\, l(Q_i)\,, \tag{5.3.7}$$

где

$$C = 5\sqrt{n} + 8n\,/\varepsilon^2\,.$$

Куб S_k называется *отраженным* кубом для $Q_i \in W_3$ и обозначается Q_i^*. Одному кубу из W_3 может соответствовать несколько отраженных кубов.

Лемма 5.3.3 [186] *Пусть $Q_i \in W_3$. Если S_1, $S_2 \in W_1$ и обладают свойствами* (5.3.6), (5.3.7), *то*

$$d(S_1, S_2) \leq C_1\, l(Q_i)\,,$$

где $C_1 = 2\,C$ и C – постоянная из предыдущей леммы.

Лемма 5.3.4 [186] *Пусть $S_k \in W_1$. Существует не более, чем C_2 кубов $Q_j \in W_3$ таких, что $Q_j^* = S_k$.*

Здесь C_2 – постоянная, зависящая только от n, ε и δ.

Лемма 5.3.5 [186] *Если Q_i, $Q_j \in W_3$ и $Q_i \cap Q_i \neq \emptyset$, то*

$$d(Q_i^*, Q_j^*) \leq C_3\, l(Q_i)\,,$$

где C_3 – постоянная, зависящая только от n, ε и δ.

Пусть $\{Q_1, Q_2\,, \ldots, Q_m\}$ – набор кубов из W_3 таких, что $Q_i \neq Q_j$, $i \neq j$, и $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$. Такой набор кубов называется *цепью* кубов, соединяющих Q_1 и Q_m, а число m – длиной этой цепи.

Лемма 5.3.6 [186] *Если Q_i, $Q_j \in W_3$ и $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, то найдется цепь*

$$F_{ij} = \{Q_i^* = S_1,\, S_2, \ldots, S_m = Q_j^*\}\,,$$

соединяющая Q_i^* и Q_j^*, длина которой не превосходит некоторой постоянной C_4, зависящей только от n, ε и δ.

Для произвольных двух касающихся друг друга кубов Q_i, $Q_j \in W_3$ выберем цепь F_{ij}, как в лемме 5.3.6, и положим

$$F(Q_i) = \cup_{\substack{Q_j \in W_3 \\ Q_i \cap Q_j \neq \emptyset}} F_{ij}\,.$$

Элементами множества $F(Q_i)$ являются кубы из W_1. Объединение всевозможных кубов из $F(Q_i)$ (как множеств из $\mathbb{R}^n$) называется *связкой*, соответствующей кубу Q_i, и обозначается символом $\mathcal{F}(Q_i)$ (таким образом, $\mathcal{F}(Q_i)$ – подмножество $\mathbb{R}^n$).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ есть (ε, δ)-область. Рассмотрим оператор продолжения $\Lambda_1 : W^{1,m}(D) \to W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$, $m > 1$, построенный в [186] (оператор Λ_1 является ограниченным, его конкретный вид далее не существенен). Имеет место следующее утверждение, являющееся специальным случаем леммы 3.2 из [186].

Лемма 5.3.7 *Если $Q_0 \in W_3$, то для всякой функции $f \in W^{1,m}(D)$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено*

$$\|D^i \Lambda_1 f\|_{L^m(Q_0)} \leq C_5\, \|D^i f\|_{L^m(Q_0^*)} + C_6\, \|\nabla f\|_{L^m(\mathcal{F}(Q_0))}\,,$$

$$\|\Lambda_1 f\|_{L^m(Q_0)} \leq C_5\, \|f\|_{L^m(Q_0^*)} + C_6\, l(Q_0)\, \|\nabla f\|_{L^m(\mathcal{F}(Q_0))}\,.$$

Здесь C_5 и C_6 суть постоянные, зависящие только от n, m, ε и δ.

Лемма 5.3.8 *Пусть G – произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $k > 0$ – натуральное число. Существует постоянная $C_7 = C_7(m,k)$ такая, что для всякого набора из k функций $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, класса $L^m(G)$ выполнено*

$$\left(\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i^2\right)^{m/2} d\mathcal{H}^n\right)^{1/m} \le C_7 \sum_{i=1}^k \left(\int\limits_G |\varphi_i|^m \, d\mathcal{H}^n\right)^{1/m}.$$

Доказательство. Мы будем использовать эквивалентность произвольных двух норм на конечномерном пространстве. Именно,

$$\left(\sum_{i=1}^k \varphi_i^2\right)^{1/2} \le C_8(m,k) \left(\sum_{i=1}^k |\varphi_i|^m\right)^{1/m},$$

а потому

$$\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i^2\right)^{m/2} d\mathcal{H}^n \le C_8^m \sum_{i=1}^k \int\limits_G |\varphi_i|^m \, d\mathcal{H}^n \,. \tag{5.3.8}$$

Положим

$$b_i = \left(\int\limits_G |\varphi_i|^m \, d\mathcal{H}^n\right)^{1/m}.$$

Сумма в правой части (5.3.8) записывается как

$$\sum_{i=1}^k b_i^m \,.$$

Однако,

$$\left(\sum_{i=1}^k b_i^m\right)^{1/m} \le C_9(m,k) \sum_{i=1}^k b_i \,. \tag{5.3.9}$$

Пользуясь соотношениями (5.3.8), (5.3.9), находим

$$\left(\int\limits_G \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i^2\right)^{m/2} d\mathcal{H}^n\right)^{1/m} \le C_8 \left(\sum_{i=1}^k b_i^m\right)^{1/m} \le$$

$$\leq C_8\, C_9 \sum_{i=1}^{k} b_i = C_7 \sum_{i=1}^{k} \left(\int\limits_G |\varphi_i|^m d\mathcal{H}^n \right)^{1/m},$$

где $C_7 = C_8\, C_9$. □

Лемма 5.3.9 *Если $Q_0 \in W_3$, то для любой функции $f \in W^{1,m}(D)$ выполнено*

$$\|\nabla \Lambda_1 f\|_{L^m(Q_0)} \leq C_{10}\, \|\nabla f\|_{L^m(\mathcal{F}(Q_0))}\, .$$

Доказательство. Суммируем по всем $i = 1, 2, \ldots, n$ неравенства из леммы 5.3.7. Мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \|D^i \Lambda_1 f\|_{L^m(Q_0)} \leq C_5 \sum_{i=1}^{n} \|D^i f\|_{L^m(Q_0^*)} + n\, C_6\, \|\nabla f\|_{L^m(\mathcal{F}(Q_0))}\, .$$

В силу леммы 5.3.8, для левой части этого неравенства справедлива оценка снизу

$$\frac{1}{C_7} \||\nabla \Lambda_1 f|\|_{L^m(Q_0)} \leq \sum_{i=1}^{n} \|D^i f\|_{L^m(Q_))}\, . \tag{5.3.10}$$

С другой стороны, поскольку $|D^i f| \leq |\nabla f|$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \|D^i f\|_{L^m(Q_0^*)} \leq n\, \||\nabla f|\|_{L^m(Q_0^*)} \leq n\, \||\nabla f|\|_{L^m(\mathcal{F}(Q_0))} \tag{5.3.11}$$

(последняя оценка в цепочке – следствие включения $Q_0 \subset \mathcal{F}(Q_0)$).

Оценки (5.3.10), (5.3.11) влекут утверждение леммы с постоянной

$$C_{10} = n\, C_7 (C_5 + C_6)\, .$$

□

Лемма 5.3.10 *Для любой (ε, δ)-области $D \subset \mathbb{R}^n$ найдется постоянная $C_{11} = C_{11}(n, \varepsilon, \delta)$ такая, что каждая из точек $x \in D$ покрывается не более, чем C_{11} связками $\mathcal{F}(Q_i)$, $Q_i \in W_3$.*

Для **доказательства** см. формулу (3.2) в [186].

Лемма 5.3.11 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная (ε, δ)-область. Найдется постоянная $\gamma = \gamma(n, \varepsilon, \delta) \geq 1$ такая, что если $x \in D$ и $Q_i \cap B(x, r) \neq \emptyset$, $Q_i \in W_3$, то $\mathcal{F}(Q_i) \subset B(x, \gamma\, r)$.*

Доказательство. Так как $Q_i \cap B(x, r) \neq \emptyset$, то $d(Q_i, \partial D) \leq r$. В силу свойства (5.3.3) разбиения Уитни, имеем $l(Q_i) \leq r$.

На основании леммы 5.3.1 для отраженного куба Q_i^* справедлива оценка $l(Q_i^*) \leq 4r$, а в соответствии с леммой 5.3.3 выполнено $d(Q_i, Q_i^*) \leq C\, r$.

Если y – центр куба Q_i и y^* – центр куба Q_i^*, то

$$|x - y^*| \leq |x - y| + |y - y^*| \,.$$

Однако,

$$|x - y| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{2}\right) r$$

и

$$|y - y^*| \leq d(Q_i, Q_i^*) + \frac{\sqrt{n}}{2}\, \left(l(Q_i) + l(Q_i^*)\right) \leq$$

$$\leq C\, r + \frac{\sqrt{n}}{2}\, (r + 4\, r) \,.$$

Тем самым,

$$|x - y| \leq (1 + 3\sqrt{n} + C)\, r \,.$$

По лемме 5.3.5 длина любой цепи с началом Q_i^* в связке $F(Q_i)$ не превосходит C_3, поэтому с учетом свойства (5.3.5) для центра z произвольного куба из $F(Q_i)$ имеем

$$|y^* - z| \leq l(Q_i^*) \left(\frac{1}{2} + 4 + \cdots + 4^{C_3 - 2} + 4^{C_3 - 1} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= C_{12}\, l(Q_i^*) \leq 4\, C_{12}\, r \,.$$

Так как сторона любого куба из $F(Q_i)$ не превосходит

$$4^{C_3 - 1} l(Q_i^*) \leq 4\, C_3\, r \,,$$

то для произвольной точки $w \in \mathcal{F}(Q_i)$ выполнено

$$|y^* - w| \leq 4\, C_{12} r + \frac{\sqrt{n}}{2} 4^{C_3} r = C_{13}\, r \,.$$

Тем самым,

$$|x-w| \le |x-y^*| + |y^*-w| \le (1+3\sqrt{n}+C+C_{13})\,r = \gamma\,r\,.$$

$\square$

Лемма 5.3.12 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная (ε,δ)-область. Существует постоянная $K = K(n,\varepsilon,\delta)$ такая, что при любом $r \le \varepsilon\,\delta/(16n)$ выполнено*

$$\int\limits_{B(x,r)\setminus D} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n \le K \int\limits_{B(x,\gamma r)\cap D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n\,.$$

Доказательство. Пусть $r \le \varepsilon\,\delta/(16n)$. Для всякого двоичного куба $Q_i \in W_3$, пересекающегося с шаром $B(x,r)$, выполнено $d(Q_i,\partial D) \le r$. Согласно свойству (5.3.3) разбиения Уитни и определению семейства W_3, находим

$$l(Q_i) \le d(Q_i,\partial D) \le r \le \varepsilon\,\delta/(16n)\,.$$

Применяя лемму 5.3.11, заключаем, что для всех таких кубов $Q_i \in W_3$ выполнено $\mathcal{F}(Q_i) \subset B(x,\gamma r)$.

Обозначим через M множество всевозможных кубов из W_3, пересекающихся с $B(x,r)$. Тогда

$$\int\limits_{B(x,r)\setminus D} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n \le \sum_{Q_i\in M} \int\limits_{Q_i} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n \equiv A\,.$$

По лемме 5.3.9

$$A \le \sum_{Q_i\in M} C_{10}^m \int\limits_{\mathcal{F}(Q_i)} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \equiv B\,.$$

По лемме 5.3.10

$$B \le C_{10}^m C_{11} \int\limits_{\cup\mathcal{F}(Q_i)} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \le C_{10}^m C_{11} \int\limits_{B(x,\gamma r)\cap D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n$$

и лемма доказана с постоянной $K = C_{10}^m C_{11}$. $\square$

Сформулируем основной результат данного раздела.

Теорема 5.3.1 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная (ε,δ)-область и $f \in W^{1,m}(D)$, $1 \le m \le n$. Если $r \le \varepsilon\,\delta/(16n)$ и для любого $x \in D$ выполнено*

$$\int\limits_{B(x,\gamma r)\cap D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \le C\, r^{n-m+m\,\alpha}\,,$$

где $0<\alpha<1$ и $\gamma \ge 1$ – постоянная из леммы 5.3.11, то

$$\operatorname{osc}\{f, D\cap B(x,r/2)\} \le K_1\, r^{\alpha}\,.$$

Доказательство. Так как D является (ε,δ)-областью, то существует ограниченный оператор продолжения [186]

$$\Lambda_1 : W^{1,m}(D) \to W^{1,m}(\mathbb{R}^m)\,.$$

По лемме 5.3.12

$$\int\limits_{B(x,r)\setminus D} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n \le K \int\limits_{B(x,\gamma r)\cup D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \le KC\, r^{n-m+m\alpha}\,.$$

Однако,

$$\int\limits_{B(x,r)} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n \le \int\limits_{B(x,r)\setminus D} |\nabla(\Lambda_1 f)|^m d\mathcal{H}^n + \int\limits_{B(x,r)\cap D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \le$$

$$\le KC\, r^{n-m+m\alpha} + \int\limits_{B(x,\gamma r)\cap D} |\nabla f|^m d\mathcal{H}^n \le K(C+1)\, r^{n-m+m\alpha}\,.$$

Поскольку шары $B(x,\frac{3}{2}r)$ входят в область определения функции $\Lambda_1 f$, то по лемме Морри

$$\operatorname{osc}\{\Lambda_1 f, B(x,r/2)\} \le K_1\, r^{\alpha}\,.$$

Утверждение теоремы следует из оценки

$$\operatorname{osc}\{f, B(x,r/2)\cap D\} \le \operatorname{osc}\{\Lambda_1 f, B(x,r/2)\}\,.$$

$\Box$

5.3.2 Условия на модуль семейства

Ниже предлагается подход к проблеме, базирующийся на методе модулей.

Напомним еще раз понятие p-модуля семейства кривых. Пусть $p > 1$ и пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\Gamma = \{\gamma\}$ – некоторое семейство локально спрямляемых дуг или кривых $\gamma \subset D$. Обозначим через $\mathcal{P}(\Gamma)$ множество всевозможных измеримых по Борелю функций $\rho(x) \geq 0$, определенных в D и таких, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) d\mathcal{H}^1 \geq 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma. \tag{5.3.12}$$

Функции $\rho(x) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ являются допустимыми для семейства Γ.

Величина

$$\mathrm{mod}_p \Gamma = \inf_{\rho \in \mathcal{P}(\Gamma)} \int\limits_{D} \rho^p(x) * \mathbb{1}, \quad * \mathbb{1} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \tag{5.3.13}$$

является $p-$модулем семейства Γ.

Фиксируем произвольно пару точек $a_1, a_2 \in \overline{D}$. Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ – семейство всевозможных локально спрямляемых дуг γ в $\overline{D}$, соединяющих a_1 и a_2.

Если $p > n$ и точки a_1, a_2 не лежат на границе ∂D, то

$$\mathrm{mod}_p \Gamma(a_1, a_2) > 0\,.$$

Более того, для любого компактного множества $K \subset D$ найдется постоянная $C(K)$ такая, что

$$\mathrm{mod}_p\, \Gamma(a_1, a_2) \geq \frac{C(K)}{|a_1 - a_2|^{p-n}} \qquad \forall\, a_1, a_2 \in K. \tag{5.3.14}$$

Данная оценка может быть получена традиционными методами.

Пусть $f \in W^{1,p}(D)$ – произвольная функция и $p > n$. Для каждой дуги $\gamma \in \Gamma(a_1, a_2)$, вдоль которой f абсолютно непрерывна, имеем

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq \int\limits_{\gamma} |\nabla f(x)|\, d\mathcal{H}^1.$$

Функция
$$\rho(x) = \frac{|\nabla f(x)|}{|f(a_1) - f(a_2)|}$$
удовлетворяет условию (5.3.12) и, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{P}(\Gamma)$ функций, допустимых для семейства $\Gamma(a_1, a_2)$.

Пользуясь (5.3.13), получаем
$$|f(a_1) - f(a_2)| \le \left(\frac{1}{\mathrm{mod}_p \Gamma(a_1, a_2)} \int\limits_D |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1} \right)^{\frac{1}{p}},$$
что вместе с (5.3.14) составляют содержание теоремы В.И. Кондрашова [105, §11].

Этот подход очевидным образом распространяется на случай римановых многообразий.

Если хотя бы одна из точек a_1, a_2 лежит на границе области D, то вопрос о непрерывности вблизи границы функций класса $W^{1,p}(D)$, $p > n$, редуцируется к проблеме нахождения достаточно хороших условий для оценок вида (5.3.14) для $p-$модуля семейства $\Gamma(a_1, a_2)$. В существенно других терминах подобный факт был установлен в [65, § 5.1].

Если $p \le n$, то $p-$модуль семейства дуг, проходящих через заданную точку, обращается в нуль [109, глава IV]. Тем самым, применения $p-$модуля семейства дуг (при стандартном его определении) в оценках колебания $W^{1,p}-$функций вблизи границы при $p \le n$ кажутся невозможными.

Небольшое изменение в определении $p-$модуля ведет, однако, к положительному результату. Существенной частью в таком исправлении является замена класса допустимых функций $\mathcal{P}(\Gamma)$ для семейства $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ более узким семейством.

Дадим точные определения. Пусть $\mathcal{X}$ – $n-$мерное риманово многообразие и пусть $D \subset \mathcal{X}$ – область. Для произвольного $t > 0$ полагаем
$$B_D(a,t) = B(a,t) \cap D,\ \Sigma_D(a,t) = \Sigma(a,t) \cap D\,,$$
$$S_D(a,t) = \mathcal{H}^{n-1}\left(\Sigma_D(a,t)\right)\,,$$
и, далее,
$$D(a_1, a_2) = B_D(a_1, d_0) \cup B_D(a_2, d_0), \quad d_0 = d(a_1, a_2).$$

Для произвольной пары точек $a_1, a_2 \in \overline{D}$ пусть $\Gamma(a_1, a_2)$ есть семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \overline{D}$, соединяющих точки a_1 и a_2 в $\overline{D}$. Измеримая по Борелю функция $\rho(x) \geq 0$ в D называется $(p, \beta)-$*допустимой для семейства* $\Gamma(a_1, a_2)$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \geq 1, \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma(a_1, a_2), \tag{5.3.15}$$

и существует постоянная $\beta > 0$ такая, что каждая из функций

$$\phi_a(r) = \frac{1}{r^{n-p+\beta}} \int\limits_{B_D(a,r)} \rho^p \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \quad a = a_1,\, a_2, \tag{5.3.16}$$

является неубывающей на $(0, d_0)$, $d_0 = d(a_1, a_2)$.

Величина

$$\operatorname{mod}_{p,\beta} \Gamma(a_1, a_2) = \inf_{\rho} \int\limits_{D(a_1,a_2)} \rho^p \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \tag{5.3.17}$$

где точная нижняя грань берется по всем $(p, \beta)-$допустимым функциям $\rho(x)$ для семейства $\Gamma(a_1, a_2)$, называется $(p, \beta)-$*модулем семейства* $\Gamma(a_1, a_2)$.

Следующая теорема частично решает проблему непрерывности вблизи границы D функций класса $W^{1,p}(D)$.

Теорема 5.3.2 *Пусть $f \in W^{1,p}(D)$ и пусть существуют $\beta > 0$, $\delta > 0$ такие, что для каждой точки $a \in D$ функция*

$$\phi_a(r) = \frac{1}{r^{n-p+\beta}} \int\limits_{B_D(a,r)} |\nabla f(x)|^p \, * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \tag{5.3.18}$$

является неубывающей на $(0, \delta]$. Тогда

(i) если существует точка $x_0 \in D$, для которой

$$\inf_{a \in D} \operatorname{mod}_{p,\beta} \Gamma(a, x_0) = \alpha > 0, \tag{5.3.19}$$

то функция $f(x)$ ограничена в D, причем

$$\sup_{x\in D}|f(x)| \le |f(x_0)| + \left(\frac{1}{\alpha}\int\limits_D |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{5.3.20}$$

(*ii*) *если существует функция $\eta(t) : [0,\delta) \to (0,\infty)$, $\eta(t) \to \infty$ при $t \to 0$ такая, что для всякой пары точек $a_1, a_2 \in D$, $d_0 = d(a_1,a_2) < \delta$, выполнено неравенство*

$$\mathrm{mod}_{p,\beta}\Gamma(a_1,a_2)\, d_0^{p-n-\beta} \ge \eta\big(d_0\big), \tag{5.3.21}$$

то функция f непрерывна вплоть до границы области D, причем для любых $a_1, a_2 \in D$, $d_0 = d(a_1,a_2) < \delta$, справедлива оценка

$$|f(a_1) - f(a_2)| \le \left(\frac{2\,\delta^{p-n-\beta}}{\eta\big(d_0\big)}\int\limits_D |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.3.22}$$

Доказательство теоремы 5.3.2 весьма несложно. Пусть x_0, a – произвольная пара точек в D. Выберем

$$\rho(x) = \frac{|\nabla f(x)|}{|f(a) - f(x_0)|}.$$

Предположения, накладываемые на функцию (5.3.18), влекут, что функция $\rho(x)$ обладает свойством (5.3.16) в каждой из точек x_0 и a. Поскольку для каждой из дуг $\gamma \in \Gamma(a,x_0)$ выполнено

$$\int\limits_\gamma |\nabla f(x)|\, d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}} \ge |f(a) - f(x_0)|,$$

то $\rho(x)$ удовлетворяет неравенству (5.3.15) и, таким образом, данная функция (p,β)-допустима для семейства $\Gamma(a,x_0)$. В силу (5.3.17), имеем

$$\mathrm{mod}_{p,\beta}\,\Gamma(a,x_0) \le \frac{1}{|f(a) - f(x_0)|^p}\int\limits_{D(a,x_0)} |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Отсюда,

$$|f(a)-f(x_0)|\le\left(\frac{1}{\alpha}\int\limits_D|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

что влечет (5.3.20) и обеспечивает справедливость утверждения (i) теоремы.

Докажем утверждение (ii). Зафиксируем произвольно пару точек

$$a_1,a_2\in D\,,\quad d_0<\delta\,.$$

Как и выше, проверяем, что функция

$$\rho(x)=\frac{|\nabla f(x)|}{|f(a_1)-f(a_2)|}$$

допустима для семейства дуг $\Gamma(a_1,a_2)$, и, тем самым,

$$|f(a_1)-f(a_2)|^p\,\mathrm{mod}_{p,\beta}\,\Gamma(a_1,a_2)\le\int\limits_{D(a_1,a_2)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}.\tag{5.3.23}$$

На основании монотонности функции (5.3.18), для любого $k=1,2$ можно записать

$$\frac{1}{d_0^{n-p+\beta}}\int\limits_{B_D(a_k,d_0)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\le\frac{1}{\delta^{n-p+\beta}}\int\limits_{B_D(a_k,\delta)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Тем самым,

$$\int\limits_{D(a_1,a_2)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\le\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{B_D(a_k,d_0)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\le$$

$$\le\frac{d_0^{n-p+\beta}}{\delta^{n-p+\beta}}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{B_D(a_k,\delta)}|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\le 2\frac{d_0^{n-p+\beta}}{\delta^{n-p+\beta}}\int\limits_D|\nabla f(x)|^p\,*\,\mathbb{1}_{\mathcal{X}},$$

и соотношение (5.3.23) влечет

$$|f(a_1)-f(a_2)|^p\,\mathrm{mod}_{p,\beta}\,\Gamma(a_1,a_2)\,d_0^{p-n-\beta}\le$$

$$\leq \frac{2}{\delta^{n-p+\beta}} \int\limits_D |\nabla f(x)|^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Применяя условие (5.3.21), приходим к (5.3.22).

Теорема 5.3.2 редуцирует проблему получения гельдеровских оценок для $W^{1,p}$-функций к задаче поиска подходящих оценок (p,β)-модуля для соответствующих классов дуг $\Gamma(a_1,a_2)$. С этой точки зрения утверждение (ii) теоремы 5.1.1 может трактоваться как нижняя оценка для $\mathrm{mod}_{p,\beta}\,\Gamma(a_1,a_2)$. Далее мы приводим модификацию этой оценки, адекватную оценке модуля непрерывности вблизи границы $W^{1,p}$-функции.

Пусть $D \subset \mathcal{X}$ – область, $a \in D$ – точка, и $\varepsilon > 0$. Предположим, что радиус инъективности экспоненциального отображения удовлетворяет требованию $r_{inj}(a) \geq \varepsilon$. Обозначим через $\mathcal{G}_D(a,\varepsilon)$ множество всех точек $x \in D \cap B(a,\varepsilon)$, каждая из которых может быть соединена с a посредством геодезического сегмента $l(x,a)$, целиком лежащего в D.

В шаре $B(a,\varepsilon)$ вводим сферические координаты

$$(r,\theta)\,, \quad 0 \leq r \leq \varepsilon\,, \quad \theta \in S^{n-1}\,,$$

с полюсом в точке a. Для произвольного $r \in (0,\varepsilon)$ символом $\Sigma^*_D(a,r)$ будем обозначать проекцию $\Sigma_D(a,r)$ на S^{n-1}, то есть множество всех $\theta \in S^{n-1}$ таких, что каждый из геодезических сегментов, выходящих из a в направлении θ, пересекает поверхность $\Sigma_D(a,r)$.

Заметим, что

$$S_D(a,r) = \int\limits_{\Sigma_D(a,r)} d\mathcal{H}^{n-1} = \int\limits_{\Sigma^*_D(r,\theta)} G_a(r,\theta)\,d\theta.$$

Теорема 5.3.3 *Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное риманово многообразие и $D \subset \mathcal{X}$ – область. Пусть $a_1, a_2 \in D$ – пара точек, в которых многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям a), b) с постоянной $\delta = d_0 = d(a_1,a_2)$. Предположим, что существуют постоянные c'_1, c'_2, $0 < c'_1 < c'_2 \leq \omega_{n-1}$, c'_3, c'_4, $0 < c'_3 < c'_4 < \infty$, для которых при почти всех $r \in (0,d_0)$ имеют место неравенства*

$$c'_1 \leq \mathcal{H}^{n-1}\left(\Sigma^*_D(a_k,r)\right) \leq c'_2 \quad (k=1,2), \tag{5.3.24}$$

и

$$c'_3 r^{n-2} \leq S'_D(a_k,r) \leq c'_4 r^{n-2} \quad (k=1,2). \tag{5.3.25}$$

Тогда для любого $p \geq 1$ *и любого* $\beta > 0$ *выполнено*

$$d_0^{n-p-np}\,(\mathcal{H}^n Q_D(a_1,a_2))^p \leq 2^{p+1}\big(c_7'\big)^p \operatorname{mod}_{p,\beta}\Gamma(a_1,a_2). \tag{5.3.26}$$

Здесь

$$Q_D(a_1,a_2)=\mathcal{G}_D(a_1,d_0)\cap\mathcal{G}_D(a_2,d_0)$$

и мы можем положить

$$c_7'=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\frac{c_2'}{c_1'}\left(\frac{c_4'}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}\ \frac{p}{np+\beta}\left(1+(n-1)\frac{p}{\beta}\left(\frac{c_4'}{c_3'}\right)^2\right).$$

Доказательство лишь незначительно отличается от доказательства утверждения (ii) теоремы 5.1.1. Пусть $\rho(x)\geq 0$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям (5.3.15), (5.3.16). Для всякого $x\in Q_D(a_1,a_2)$ можно записать

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,a_2)}\int\limits_{\gamma}\rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}\leq\mathcal{R}(\Gamma)\equiv\inf_{x\in Q_D(a_1,a_2)}\left(\int\limits_{l_1(x)}\rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}+\int\limits_{l_2(x)}\rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}\right),$$

где $l_k(x)$ $(k=1,2)$ означает отрезок геодезической от x до a_k.

Интегрируя по $Q_D(a_1,a_2)$, получаем

$$\mathcal{R}(\Gamma)\,\mathcal{H}^n\left(Q_D(a_1,a_2)\right)\leq\int\limits_{B_D(a_1,d_0)}*\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\int\limits_{l_1(x)}\rho\,d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}+$$

$$+\int\limits_{B_D(a_2,d_0)}*\mathbb{1}_{\mathcal{X}}\int\limits_{l_2(x)}\rho\,d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}\equiv I_1+I_2. \tag{5.3.27}$$

Для каждого $k=1,2$ имеем

$$I_k=\int\limits_0^{d_0}dr\int\limits_{\Sigma_D(a_k,r)}d\mathcal{H}^{n-1}_x\int\limits_{l_k(x)}\rho\,d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}=$$

$$=\int\limits_0^{d_0}dr\int\limits_{\Sigma^*_D(a_k,r)}G_{a_k}(r,\theta)d\theta\int\limits_0^r\rho(t,\theta)dt\leq$$

$$\leq c_2 \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} d\theta \int\limits_0^r \rho(t,\theta)dt =$$

$$= c_2 \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_0^r dt \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} \rho(t,\theta)dt. \tag{5.3.28}$$

Поскольку

$$J_k(r) \equiv \int\limits_{B_D(a_k,r)} \rho^p \ast \mathbb{1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_0^r dt \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} G_{a_k}(t,\theta)\rho(t,\theta)d\theta,$$

то

$$J_k'(r) = \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} G_{a_k}(r,\theta)\rho(r,\theta)d\theta \geq c_1\Delta(r) \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} \rho(r,\theta)d\theta,$$

а в соответствии с (5.3.28) находим

$$I_k \leq \frac{c_2}{c_1} \int\limits_0^{d_0} \Delta(r)dr \int\limits_0^r \frac{J_k'(t)}{\Delta(t)}dt.$$

Условие (5.1.5) влечет

$$c_1\Delta(r)\mathcal{H}^{n-1}\Sigma_D^*(a_k,r) \leq \int\limits_{\Sigma_D^*(a_k,r)} G_{a_k}(r,\theta)d\theta \leq c_2\Delta(r)\mathcal{H}^{n-1}\left(\Sigma_D^*(a_k,r)\right),$$

а неравенство, двойственное (5.3.24) дает

$$\frac{1}{c_2c_2'}S_D(a_k,r) \leq \Delta(r) \leq \frac{1}{c_1c_1'}S_D(a_k,r).$$

Откуда приходим к неравенству

$$I_k \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\frac{c_2'}{c_1'} \int\limits_0^{d_0} S_D(a_k,r)dr \int\limits_0^r \frac{J_k'(t)}{S_D(a_k,t)}dt. \tag{5.3.29}$$

Пользуясь аргументами, аналогичными примененным в доказательстве утверждения (ii), в силу (5.3.24) и (5.3.25) сначала получаем оценку

$$J_k(r) \le \left(\frac{c_4'}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} K_k^{\frac{1}{p}}\, r^{n-1+\frac{\beta}{p}}, \quad K_k = \frac{1}{d_0^{n-p+\beta}} \int\limits_{B_D(a_k,d_0)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

и, далее, оценку

$$\int\limits_0^{d_0} S_D(a_k,r)dr \int\limits_0^r \frac{J_k'(t)}{S_D(a_k,t)}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{d_0} J_k(r)dr + \int\limits_0^{d_0} S_D(a_k,r)dr \int\limits_0^r \frac{J_k(t)}{S_D^2(a_k,t)} S_D'(a_k,t)dt \le$$

$$\le \left(\frac{c_4'}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} K_k^{\frac{1}{p}} \frac{p}{np+\beta} \left(1+(n-1)\frac{p}{\beta}\left(\frac{c_4'}{c_3'}\right)^2\right) d_0^{n+\frac{\beta}{p}}, \quad \forall r \le d_0.$$

Так как

$$K_1^{\frac{1}{p}} + K_2^{\frac{1}{p}} \le 2\big(K_1+K_2\big)^{\frac{1}{p}} \le 2^{1+\frac{1}{p}}\, d_0^{(p-n-\beta)/p} \left(\int\limits_{D(a_1,a_2)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

то неравенства (5.3.27), (5.3.29) приводят к оценке

$$d_0^{(n-p-np)/p}\, \mathcal{R}(\Gamma)\, \mathcal{H}^n\left(Q_D(a_1,a_2)\right) \le$$

$$\le \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{c_2'}{c_1'} \left(\frac{c_4'}{n(n-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p}{np+\beta}\left(1+(n-1)\frac{p}{\beta}\left(\frac{c_4'}{c_3'}\right)^2\right) \times$$

$$\times 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{D(a_1,a_2)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это неравенство означает, что для произвольной функции $\rho \in L^p(D)$ выполняется

$$d_0^{n-p-np}\left(\mathcal{H}^n\left(Q_D(a_1,a_2)\right)\right)^p \leq \left(c_7'\right)^p \frac{\int\limits_{B_D(a_k,d_0)} \rho^p * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho d\mathcal{H}^1_{\mathcal{X}}\right)^p},$$

где c_7' – постоянная, определенная в теореме 5.3.3.

Из определения $(p,\beta)-$модуля семейства $\Gamma(a_1,a_2)$ легко вывести необходимое неравенство (5.3.26). $\square$

Глава 6

Отображения с ограниченным искажением

Изучаются асимптотические свойства отображений с ограниченным искажением на некомпактных римановых многообразиях.

6.1 Оценки с использованием изопериметрии

Приводятся оценки скорости роста интеграла энергии для отображения с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ многообразий в терминах специальных изопериметрических условий на $\mathcal{Y}$. В качестве приложения доказываются теоремы типа Фрагмена – Линделефа [68], [201], [203].

6.1.1 Области роста

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ – неограниченная область и пусть $w = f(z)$ – голоморфная функция, непрерывная на замыкании $\overline{D}$. Принцип Фрагмена – Линделефа [223] традиционно формулируется в виде альтернативы :

α) если $\mathrm{Re} f(z) \le 1$ всюду на границе ∂D, то либо $\mathrm{Re} f(z)$ растет с достаточно высокой скоростью при $z \to \infty$, либо $\mathrm{Re} f(z) \le 1$ при всех $z \in D$;

β) если $|f(z)| \le 1$ на ∂D, то либо $|f(z)|$ растет с достаточно высокой скоростью при $|z| \to \infty$, либо $|f(z)| \le 1$ при всех $z \in D$.

Здесь скорость роста величин $\mathrm{Re} f(z)$ и $|f(z)|$ зависит от "ширины" области D вблизи бесконечности и чем "уже" область, тем выше скорость роста.

Не трудно доказать, что эти условия эквивалентны условиям:

α_1) если $\mathrm{Re} f(z) = 1$ на ∂D и $\mathrm{Re} f(z) \geq 1$ в D, то либо $\mathrm{Re} f(z)$ растет с достаточно высокой скоростью при $z \to \infty$, либо $f(z) \equiv \mathrm{const}$;

β_1) если $|f(z)| = 1$ на ∂D и $|f(z)| \geq 1$ в D, тогда либо $|f(z)|$ возрастает с достаточно высокой скоростью при $z \to \infty$, либо $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$, – отображение с ограниченным искажением. Предположим, что $f \in C^0(\overline{D})$. Кажется вполне естественным рассмотреть альтернативу Фрагмена – Линделефа при следующих предположениях:

a) $f_1(x)|_{\partial D} = 1$ и $f_1(x) \geq 1$ всюду в D,

b) $\sum\limits_{i=1}^{p} f_i^2(x)|_{\partial D} = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{p} f_i^2(x) \geq 1$ на D, $1 < p < n$,

c) $|f(x)| = 1$ на ∂D и $|f(x)| \geq 1$ на D.

Ряд формулировок принципа Фрагмена – Линделефа в разных предположениях можно найти в [72], [230], [17], [159], [198], [199]. Однако, эти результаты носят во многом качественный характер. Здесь мы предлагаем иной подход к теоремам типа Фрагмена – Линделефа для отображений с ограниченным искажним, базирующийся на изопериметрии. Данный подход ведет к результатам, близким к точным, и может быть использован также при доказательстве теорем типа Фрагмена – Линделефа на римановых многообразиях.

Пусть $\mathcal{Y}$ — n-мерное некомпактное риманово C^3-многообразие с кусочно-гладким краем $\partial\mathcal{Y}$ (возможно пустым). Будем говорить, что функция u класса $C^0(\overline{\mathcal{Y}}) \cap W^{1,n}(\mathcal{Y})$ есть *функция роста* и $\mathcal{Y}$ есть *области роста*, если

(i) $u \geq 1$,

(ii) $u|_{\partial\mathcal{Y}} = 1$, если $\partial\mathcal{Y} \neq \emptyset$ и $\sup_{y \in \mathcal{Y}} u(y) = +\infty$.

Рассмотрим отображение с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ есть некомпактное риманово C^3-многообразие,

$$\dim \mathcal{X} = n \quad \text{и} \quad \partial\mathcal{X} \neq \emptyset\,.$$

Предположим, что $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$. Далее под принципом Фрагмена – Линделефа для отображения f мы будем понимать альтернативу вида: либо $u(f(x))$ имеет достаточно высокий рост в $\mathcal{X}$, либо $f(x) \equiv const$.

Выбирая область роста $\mathcal{Y}$ и функцию роста $u(y)$, мы будем получать различные формулировки принципа Фрагмена – Линделефа для отображений с ограниченным искажением. Как показывают примеры в [72], наилучшие результаты получаются, если в качестве функции роста выбирается n-гармоническая функция. В случае a) в качестве области роста выбирается $\mathcal{Y} = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 \geq 0\}$, а в качестве функции роста мы полагаем $u(y) = y_1 + 1$; в случае b) область роста $\mathcal{Y}$ есть множество $\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^p y_i^2 \geq 1\}$, $1 < p < n$, и $u(y) = (\sum_{i=1}^p y_i^2)^{(n-p)/(2(n-1))}$; в случае c) область роста есть $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| > 1\}$ и функция роста $u(y) = \ln|y| + 1$.

Наш подход базируется на изопериметрических условиях для $\mathcal{Y}$ с метрикой ds_u, определенной с помощью функции роста. Для многообразий размерности $\dim\mathcal{X} = \dim\mathcal{Y} = n > 2$ имеется много различных изопериметрических типов, не эквивалентных друг другу, см. [20].

Стандартное изопериметрическое неравенство связывает объем n-мерной области и $(n-1)$-мерную площадь его границы либо объем и диаметр области. Можно указать неравенства, связывающие смешанные объемы в смысле Минковского выпуклой оболочки и его границы [20, глава 4] и др. Каждый из указанных изопериметрических типов имеет свои пределы применимости и освещают различные аспекты общей проблемы. Мы рассмотрим здесь только классический изопериметрический тип, надеясь вернуться к общему случаю в другом месте.

6.1.2 Специальная функция исчерпания

Ниже удобно пользоваться специальными функциями исчерпания некомпактного многообразия, понимаемыми в несколько более широком смысле, нежели введенные ранее в разделе 1.1.9. Именно, пусть $\mathcal{X}$ – некомпактное риманово многообразие с краем $\partial\mathcal{X}$ (возможно пустым). Предположим, что A удовлетворяет (2.2.15), (2.2.16) и пусть $h : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – функция исчерпания, подчиненная условиям :

a_1) существует компактное множества $K \subset \mathcal{X}$ такое, что h является решением (2.2.18) в $\mathcal{X} \setminus K$;

a_2) для почти всех $t_1,\ t_2 \in (0,\infty)$, $t_1 < t_2$, выполнено

$$\int\limits_{\Sigma_h(t_2)} \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(x,\nabla h) \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \int\limits_{\Sigma_h(t_1)} \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(x,\nabla h) \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Здесь $d\mathcal{H}^{n-1}$ – элемент $(n-1)-$мерной меры Хаусдорфа на Σ_h. Функции исчерпания с такими свойствами будут называться *специальными функциями исчерпания* $\mathcal{X}$ *относительно* A. В большинстве случаев в качестве отображения A будет выступать $n-$лапласиан, для которого

$$A(x,h) = |h|^{n-2}\, h\,.$$

Так как единичный вектор $\nu = \nabla h/|\nabla h|$ ортогонален h–сфере Σ_h, то предположение a_2) означает, что поток векторного поля $A(x,\nabla h)$ через h–сферы $\Sigma_h(t)$ постоянен.

Предположим, что функция $A(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируема. Если*

b_1) $h \in C^2(\mathcal{X}\setminus K)$, *удовлетворяет уравнению* (2.2.18), *и*

b_2) *в каждой точке* $x \in \mathcal{X}$, *где* $\partial\mathcal{X}$ *имеет касательную плоскость* $T_x(\partial\mathcal{X})$ *выполнено условие*

$$\langle A(x,\nabla h(x)), \nu\rangle = 0\,,$$

где ν *– единичный вектор внутренней нормали к границе* $\partial\mathcal{X}$, *то* h *есть специальная функция исчерпания многообразия* $\mathcal{X}$.

Доказательство этого утверждения весьма несложно. Рассмотрим область

$$\mathcal{X}(t_1,t_2) = \{x \in \mathcal{X} : t_1 < h(x) < t_2\}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \infty,$$

с границей $\partial\mathcal{X}(t_1,t_2)$. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса, имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(t_2)} \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(x,\nabla h) \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1} - \int\limits_{\Sigma_h(t_1)} \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(x,\nabla h) \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{\cup_{i=1,2}\Sigma_h(t_i)\cup\partial\mathcal{X}(t_1,t_2)} \langle \nu, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int\limits_{\partial\mathcal{X}(t_1,t_2)} \langle \nu, A(x,\nabla h)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= \int\limits_{\mathcal{X}(t_1,t_2)} \operatorname{div} A(x, \nabla h) * \mathbb{1} = 0.$$

Эти вычисления обеспечивают справедливость свойства a_2). □

6.1.3 Энергетические оценки

Пусть $\mathcal{Y}$ – некомпактное риманово многообразие размерности n. Обозначим через $ds_{\mathcal{Y}}$ элемент длины в $\mathcal{Y}$. Пусть u – локально липшицева функция в $\mathcal{Y}$ такая, что $u \geq 1$ и $u \not\equiv 1$.

Предположим, что $u|_{\partial\mathcal{Y}} = 1$, если $\partial\mathcal{Y} \neq \emptyset$ и $\sup_{y\in\mathcal{Y}} u(y) = \infty$, то есть, $u(y)$ – функция роста на $\mathcal{Y}$.

Рассмотрим метрику $ds = ds_u = |\nabla u(y)| ds_{\mathcal{Y}}$. Здесь $\nabla u(y)$ – градиент u. Если $\nabla u(y)$ не определена в точке $y \in \mathcal{Y}$, то мы полагаем $|\nabla u(y)| = 1$. Для произвольной области $G \subset \mathcal{Y}$ символом $\partial' G = \partial G \setminus \partial\mathcal{Y}$, как обычно, обозначаем границу G относительно $\mathcal{Y}$. Символом

$$V_{u,\mathcal{Y}}(G) = \int\limits_G |\nabla u(y)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$$

обозначаем объем в метрике ds, и символом

$$A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G) = \int\limits_{\partial' G} |\nabla u(y)|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{Y}}$$

– площадь относительной границы $\partial' G$ в метрике ds.

Рассмотрим изопериметрические профили многообразия $\mathcal{Y}$ с метрикой ds_u.[1] Именно, изопериметрический профиль пары $(\mathcal{Y}, ds_u)$ – это функция

$$\theta_{u,\mathcal{Y}} : [0, v) \to \mathbb{R}_+, \quad v = V_{u,\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}),$$

определяемая соотношением

$$\theta_{u,\mathcal{Y}}(\tau) = \inf \{ A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G)\,, \quad \text{где } G \subset \mathcal{Y} - \text{ компактная подобласть}$$
$$\text{с площадью границы } \mathcal{H}^{n-1}(\partial' G) < \infty, \quad V_{u,\mathcal{Y}}(G) = \tau \},$$

[1]Имеет смысл сравнить с соответствующим понятием раздела 3.3.1.

т.е. изопериметрический профиль $\theta_{u,\mathcal{Y}}$ есть наилучшая из функций θ таких, что

$$\theta(V_{u,\mathcal{Y}}) \le A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G). \tag{6.1.1}$$

Пусть $u = u(y)$ – функция роста в $\mathcal{Y}$. Предположим, что u – локально липшицево субрешение (2.2.18) в $\mathcal{Y}$, где A удовлетворяет (2.2.15) и (2.2.16) со структурными постоянными ν_1, ν_2.

Предложение 6.1.1 *Пусть $b : \mathcal{M} \to \mathcal{Y}$ – билипшицево отображение многообразия $\mathcal{M}$ на многообразие $\mathcal{Y}$. Если область роста $\mathcal{Y}$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству* (6.1.1) *с функцией θ, то функция $u^* = u \circ b$ также является функцией роста в $\mathcal{M}$ с изопериметрическим профилем*

$$\theta_{u^*,\mathcal{M}}(t) = \frac{1}{k_b}\theta_{u,\mathcal{Y}}(t). \tag{6.1.2}$$

Более того, u^* есть субрешение уравнения вида (2.2.18)*, со структурными постоянными*

$$\nu_1' = \nu_1/k_b, \quad \nu_2' = \nu_2. \tag{6.1.3}$$

Здесь k_b есть максимальная дилатация отображения b.

Доказательство. Заметим сначала, что согласно [170, теорема 14.42] функция u^* является субрешением уравнения вида (2.2.18) со структурными постоянными (6.1.3).

Пусть $G \subset \mathcal{M}$ – произвольная предкомпактная область и $G' = b(G)$ – ее образ. По определению имеем

$$V_{u^*,\mathcal{M}}(G) = \int\limits_G |\nabla u^*(m)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{M}}.$$

Для почти всех точек $m \in \mathcal{M}$ многообразия выполнено (1.1.2)

$$\nabla_y u(y) = b'(m)^* \, \nabla_m u^*(m).$$

где $b'(m)^*$ означает матрицу, полученную транспонированием матрицы $b'(m)$.

Таким образом,

$$V_{u^*,\mathcal{M}}(G) \le k_b \int\limits_{G'} |\nabla u(y)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}} = k_b \, V_{u,\mathcal{Y}}(G').$$

Аналогично,

$$A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G') = \int\limits_{\partial' G'} |\nabla u(y)|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{Y}} \le$$

$$\le \int\limits_{\partial' G} |\nabla_y u(b(m))|^{n-1} |b'(m)|^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} \le$$

$$\le \int\limits_{\partial' G} |\nabla u^*(m)|^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{M}} = A_{u^*,\mathcal{M}}(\partial' G).$$

Отсюда,

$$\theta(V_{u*,\mathcal{M}}(G)) \le \theta(k_b\, V_{u,\mathcal{Y}}(G')) \le k_b A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G') \le k_b\, A_{u^*,\mathcal{M}}(\partial' G)$$

и соотношение (6.1.2) действительно имеет место. □

Пример 6.1.1 Предположим, что областью роста $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ является полупространство $y_1 \ge 0$ и $u(y) = y_1 + 1$. В данном случае неравенство (6.1.1) есть простое следствие классического изопериметрического неравенства в $\mathbb{R}^n$, связывающего объем области и площадь ее границы.

Здесь, как и в разделе 3.3.1, имеем

$$\theta(t) = L\, t^{(n-1)/n}, \tag{6.1.4}$$

где $L = (\omega_{n-1}/2)^{1/n} n^{(n-1)/n}$ и ω_{n-1} есть $(n-1)$–мерная площадь единичной сферы $S^{n-1}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, *каждое многообразие, билипшицево эквивалентное полупространству в* $\mathbb{R}^n$, *имеет функцию роста со свойствами* (i), (ii) *раздела 6.1.1, и удовлетворяет изопериметрическому неравенству (6.1.1) с функцией* $\theta(t) = \frac{L}{k_b} t^{(n-1)/n}$.

Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное риманово многообразие с краем $\partial\mathcal{X}$ (возможно пустым). Зафиксируем локально липшицеву функцию исчерпания

$$h : \mathcal{X} \to (0,\infty)\,, \quad \overline{h} = \inf_{x\in\mathcal{X}} h(x)\,.$$

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением и пусть $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$. Предположим, что многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет изопериметрическому условию (6.1.1) с функцией θ.

Заметим сначала, что для почти всех $t \in (\overline{h}, \infty)$ ограничение отображения f на h-сферу $\Sigma_h(t)$ принадлежит классу $W^{1,n}_{\text{loc}}$. Фиксируем произвольно $t \in (\overline{h}, \infty)$ и обозначим через $B'(t)$ образ h-шара $B_h(t)$ при отображении $y = f(x)$.

Так как отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ является отображением с ограниченным искажением, оно открыто и дискретно. Для произвольного $y \in \overline{B}'(t)$ обозначим через $N(y,t)$ число прообразов точек $x \in \overline{B}_h(t)$, для которых $f(x) = y$.

Положим $\Sigma'(t) = f(\Sigma_h(t))$.

Пользуясь θ-изопериметрией многообразия $\mathcal{Y}$, имеем

$$\theta\Big(\int\limits_{B'(t)} |\nabla u(y)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}\Big) \leq \int\limits_{\partial' B'(t)} |\nabla u(y)|^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{Y}}.$$

Сужение отображения f на $\Sigma_h(t)$ обладает N-свойством Лузина, а в силу $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$, мы можем утверждать, что $\partial' B'(t) \subset \Sigma'(t)$. Выполняя замену переменных, находим

$$\theta\Big(\int\limits_{B(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n \mathcal{J}_f(x) N(f(x),t)^{-1} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\Big) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^{n-1} N(f(x),t)^{-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Данное неравенство, условие (1.1.17) и неравенство Гельдера влекут

$$\theta\Big(K^{-1} \int\limits_{B_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n |f'(x)|^n N(f(x),t)^{-1} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\Big) \leq$$

$$\leq \Big(\int\limits_{\Sigma_h(t)} N(f(x),t)^{-1} |\nabla h|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Big)^{1/n} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n |f'(x)|^n N(f(x),t)^{-1} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}}{|\nabla h|}\Big)^{(n-1)/n}.$$

Положим

$$J(t) = \int\limits_{B_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n |f'(x)|^n N(f(x),t)^{-1} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

На основании формулы Кронрода – Федерера

$$J(t) = \int\limits_{\overline{h}}^{t} d\tau \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla_y u(f(x))|^n |f'(x)|^n N(f(x),t)^{-1} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}}{|\nabla h|}$$

замечаем, что для почти всех $t \in (\overline{h}, \infty)$

$$J'(t) = \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n |f'(x)|^n N(f(x),t)^{-1} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}}{|\nabla h|}.$$

Таким образом,

$$\theta^{n/(n-1)}\left(\frac{J(t)}{K}\right) \leq J'(t) \left(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}}{N(f(x),t)}\right)^{1/(n-1)}. \tag{6.1.5}$$

Для произвольного $t > \overline{h}$ полагаем $N_f(t) = \inf_{x \in B_h(t)} N(f(x),t)$. Неравенство (6.1.5) принимает вид

$$N_f^{1/(n-1)}(t)\theta^{n/(n-1)}\left(\frac{J(t)}{K}\right) \leq J'(t)\Big(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Big)^{1/(n-1)}. \tag{6.1.6}$$

Теорема 6.1.1 *Пусть h – специальная функция исчерпания $\mathcal{X}$. Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty} dt \Big(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Big)^{1/(1-n)} = \infty. \tag{6.1.7}$$

Если многообразие $\mathcal{Y}$ является θ-изопериметрическим с функцией $\theta(t)$, для которой

$$\int^{\infty} \theta(t)^{n/(1-n)} dt < \infty, \tag{6.1.8}$$

то всякое отображение с ограниченным искажением

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y} \ \ \text{при}\, \partial\mathcal{X} \neq \emptyset,$$

есть тождественно постоянная вектор-функция.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (6.1.6). Заметим, что величина $N_f(t) \geq 1$. Проинтегрируем это дифференциальное неравенство. При всяком $\tau > \overline{h} + 1$ имеем

$$\int\limits_{\overline{h}+1}^{\tau} dt \Big(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \Big)^{1/(1-n)} \leq \int\limits_{CJ(\overline{h}+1)}^{CJ(\tau)} \theta(t)^{n/(1-n)} dt, \tag{6.1.9}$$

где $C = 1/K$.

Если $J(\tau) \not\equiv 0$, то условия (6.1.7) и (6.1.8) ведут к противоречию. Тем самым, $J(\tau) \equiv 0$ и, следовательно, $f(x) \equiv \mathrm{const}$. □

Данная теорема является некоторой версией теоремы Лиувилля для отображений с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых многообразий. Выберем функцию роста u следующим образом.

Пусть $\mathcal{Y}$ – риманово многообразие с непустым краем $\partial\mathcal{Y}$. Положим $u(y) = \rho(y, \partial\mathcal{Y}) + 1$, где $\rho(y, \partial\mathcal{Y})$ – расстояние от точки y до границы $\partial\mathcal{Y}$. Тогда $u(y) \geq 1$ и u локально липшицева функция на $\mathcal{Y}$, подчиненная условию $|\nabla u(y)| = 1$ почти всюду на $\mathcal{Y}$.

Если край $\partial\mathcal{Y} = \emptyset$, то зафиксируем произвольно точку $y_0 \in \mathcal{Y}$ и положим $u(y) = \rho(y, y_0) + 1$.

Ясно, что выбранная таким образом функция $u(y)$ является функцией роста для многообразия $\mathcal{Y}$. Кроме того, для произвольной подобласти $G \subset \mathcal{Y}$ с границей $\partial' G = \partial G \setminus \partial\mathcal{Y}$ относительно $\mathcal{Y}$ мы имеем: $V_{u,\mathcal{Y}}(G)$ есть объем G в стандартной метрике пространства $\mathbb{R}^n$, а $A_{u,\mathcal{Y}}(\partial' G)$ есть $(n-1)-$мерная площадь.

Изопериметрическое неравенство (6.1.1) теперь принимает вид

$$\theta\left(\int\limits_G *\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}\right) \le \int\limits_{\partial' G} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{Y}}. \tag{6.1.10}$$

Отсюда получаем

Следствие 6.1.1 *Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением такое, что $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$ при $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$. Пусть $h : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – функция исчерпания $\mathcal{X}$, удовлетворяющая условию* (6.1.7). *Тогда если для многообразия $\mathcal{Y}$ выполняется* (6.1.10), *где функция θ обладает свойством* (6.1.8), *то $f \equiv \mathrm{const}$.*

В силу (3.3.4), (6.1.7) и (6.1.8), имеем

Следствие 6.1.2 *Пусть $\mathcal{Y}$ – полное односвязное $n-$мерное риманово многообразие с секционной кривизной $K_{\mathcal{Y}} \le k < 0$, $k = \mathrm{const}$. Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением и $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$ при $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$.*

Если многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет (6.1.7), *то $f \equiv \mathrm{const}$.*

Пример 6.1.2 *Пусть $\mathcal{X}$ – двумерная евклидова плоскость и пусть $\mathcal{Y}$ есть плоскость Лобачевского H^2. Выберем $h(x) = |x|$. Тогда $|\nabla h| \equiv 1$ и предположение (6.1.7) выполняется.*

Плоскость Лобачевского θ-изопериметрична с функцией

$$\theta(t) = \sqrt{4\pi t + t^2}$$

(см., например, [20, §2 главы I]). Тем самым, предположение (6.1.8) также удовлетворено.

Отсюда заключаем, что всякое отображение с ограниченным искажением $f : \mathbb{R}^2 \to H^2$ является тождественно постоянным.

Рассмотрим случай, в котором $h : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ является специальной функцией исчерпания на $\mathcal{X}$. Тогда интеграл

$$I = \int\limits_{\Sigma_h(t)} \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(m, \nabla h) \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}$$

не зависит от t.

Пользуясь структурными ограничениями (2.2.15), (2.2.16), замечаем, что

$$\left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(m, \nabla h) \right\rangle \geq \nu_1 \, |\nabla h|^{n-1}$$

и

$$\left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, A(m, \nabla h) \right\rangle \leq |A(m, \nabla h)| \leq \nu_2 \, |\nabla h|^{n-1}.$$

Тем самым, для всякого $t \in (0, \infty)$ выполнено

$$\frac{1}{\nu_2} I \leq \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\nu_1} \, I. \tag{6.1.11}$$

Условие (6.1.7) на многообразие $\mathcal{X}$ выполняется автоматически. Таким образом, мы получаем

Следствие 6.1.3 *Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ обладает специальной функцией исчерпания $h : \mathcal{X} \to (0, \infty)$, а многообразие $\mathcal{Y}$ является θ-изопериметричным с функцией $\theta(t)$, удовлетворяющей предположению* (6.1.8). *Тогда всякое отображение с ограниченным искажением*

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad f(\partial \mathcal{X}) \subset \partial \mathcal{Y} \ \text{ при } \partial \mathcal{X} \neq \emptyset$$

есть тождественная постоянная.

Соотношения (6.1.5), (6.1.9) суть источники различных разновидностей теорем типа теоремы Лиувилля. Эти теоремы дают оценки минимально допустимой скорости роста интеграла энергии нетривиального отображения с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Рассмотрим пример.

Пусть $\mathcal{Y}$ – многообразие, билипшицево эквивалентное полупространству в $\mathbb{R}^n$. Как было показано выше в примере (6.1.1), изопериметрическая функция здесь имеет вид $\theta(t) = (L/k_b) \, t^{(n-1)/n}$, где L есть постоянная из (6.1.4) и k_b есть максимальная дилатация билипшицева отображения. Интеграл в правой части неравенства (6.1.9) вычисляется и данное неравенство принимает вид

$$J(\overline{h}+1) \le J(\tau) \exp\left\{ -\left(\frac{L}{k_b}\right)^{\frac{n}{n-1}} \int\limits_{\overline{h}+1}^{\tau} dt \left(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \right\},$$

где

$$J(t) = \int\limits_{B_h(t)} |f'(x)|^n \frac{*\mathbb{1}_{\mathcal{X}}}{N(f(x),t)}$$

есть специальный случай интеграла из теоремы 6.1.1.

Если функция исчерпания h многообразия $\mathcal{X}$ является специальной функцией исчерпания, то в силу (6.1.11) для каждого $\tau'' > \tau' \ge \overline{h}+1$ имеем

$$(\tau''-\tau')\left(\frac{I}{\nu_1}\right)^{1/(1-n)} \le \int\limits_{\tau'}^{\tau'} dt \left(\int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \right)^{1/(1-n)} \tag{6.1.12}$$

$$\le (\tau''-\tau')\left(\frac{I}{\nu_2}\right)^{1/(1-n)}.$$

Здесь I есть поток векторного поля $A(x,\nabla h)$ через h–сферы $\Sigma_h(t)$.

В этих предположениях на основании (3.3.3) получаем.

Следствие 6.1.4 *Пусть $\mathcal{Y}$ – полное односвязное $n-$мерное риманово многообразие секционной кривизны $K_{\mathcal{Y}} \le 0$. Если многообразие $\mathcal{X}$ имеет специальную функцию исчерпания, то всякое отображение с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$ при $\partial\mathcal{X} \ne \emptyset$, удовлетворяющее условию*

$$\lim_{\tau\to 0} J(\tau) \exp\left\{ -\overline{c}_n \left(\frac{I}{\nu_1}\right)^{-1/(n-1)} \tau \right\} = 0\,,$$

является тождественно постоянным.

На основании (6.1.2), (6.1.3), (6.1.4) приходим к утверждению.

Следствие 6.1.5 *Если многообразие $\mathcal{X}$ имеет специальную функцию исчерпания h, а многообразие $\mathcal{Y}$ билипшицево эквивалентно полупространству, то всякое отображение с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$ при $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$, обладающее свойством*

$$\liminf_{\tau\to\infty} J(\tau) \exp\left\{-\left(\frac{L}{k_b}\right)^n \left(\frac{I}{\nu_1}\right)^{-1/(n-1)} \tau\right\} = 0\,,$$

является тождественно постоянным. Здесь k_b – максимальная дилатация билипшицева отображения b.

6.1.4 Альтернатива Фрагмена – Линделефа

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – некомпактные римановы многообразия,

$$\dim\mathcal{X} = \dim\mathcal{Y} = n \geq 2\,.$$

Пусть $h : \mathcal{X} \to (0,\infty)$ – функция исчерпания $\mathcal{X}$ и $u(y) \geq 1$ – функция роста, определенная на многообразии $\mathcal{Y}$. Предположим, что $u(y)$ удовлетворяет условию (3.2.7).

Предположим, что $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ есть отображение с ограниченным искажением. Функция $u^*(x) = u(f(x))$ является субрешением некоторого уравнения вида (2.2.18), подчиненного условиям (2.2.15), (2.2.16) с $p = n$ и структурными постоянными $\nu'_1 = \nu_1/K$, $\nu'_2 = \nu_2 K$.

Фиксируем $\tau'' > \tau' > \overline{h}+1$. Выберем произвольно локально липшицеву функцию

$$\phi : (0,\infty) \to (0,1),\ \phi(\tau) = 1 \ \text{ при } \tau \leq \tau',\ \phi(\tau) = 0 \ \text{ при } \tau \geq \tau''.$$

Функция $u^*(x) - 1$ является решением дифференциального неравенства (3.2.6). Так как $u^*(x) - 1 \geq 0$ и $(u^*(x) - 1)|_{\partial\mathcal{X}} = 0$, выбирая в (3.2.7) в качестве пробной функции $\theta(x) = (u^*(x) - 1)\phi^n(h(x))$, мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \phi^n(h)\langle\nabla u^*, A(x,\nabla u^*)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq -n\int\limits_{\mathcal{X}} (u^* - 1)\,\phi^{n-1}(h)\phi'(h)\langle\nabla h, A(x,\nabla u^*)\rangle * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq n \int\limits_{\mathcal{X}} |u^* - 1|\, \phi^{n-1}(h)\, |\phi'(h)|\, |\nabla h|\, |A(x, \nabla u^*)| * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq n \Big(\int\limits_{\mathcal{X}} \phi^n(h)\, |A(x, \nabla u^*)|^{\frac{n}{n-1}} \Big)^{\frac{n-1}{n}} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \Big(\int\limits_{\mathcal{X}} |u^* - 1|^n\, |\phi'(h)|^n\, |\nabla h|^n \Big)^{\frac{1}{n}} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

Используя условия (2.2.15), (2.2.16) с указанными выше структурными постоянными ν_1', ν_2', получаем

$$c_1^n \int\limits_{\mathcal{X}} \phi^n(h)\, |\nabla u^*|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \int\limits_{\mathcal{X}} |u^* - 1|^n\, |\phi'(h)|^n\, |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}},$$

где

$$c_1 = \frac{\nu_1'}{n\nu_2'} = \frac{\nu_1}{\nu_2}(nK^2)^{-1}.$$

Указанный выше специальный выбор функции ϕ влечет

$$c_1^n \int\limits_{B_h(\tau')} |\nabla u^*|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \int\limits_{B_h(\tau'') \setminus B_h(\tau')} |u^* - 1|^n\, |\phi'(h)|^n\, |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}.$$

На основании принципа максимума находим

$$c_1^n \int\limits_{B_h(\tau')} |\nabla f|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq M^n(\tau'') \int\limits_{B_h(\tau'') \setminus B_h(\tau')} |\phi'(h(x))|^n |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}, \quad (6.1.13)$$

где

$$M(\tau) = \max_{\Sigma_h(\tau)} |u^*(x) - 1|.$$

Нам необходимо найти минимум интеграла

$$I(\phi) = \int\limits_{B_h(\tau'') \setminus B_h(\tau')} |\phi'(h(x))|^n |\nabla h|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}}$$

в классе допустимых функций ϕ.

Интегрируя по множествам уровня функции h, имеем

$$I(\phi) = \int\limits_{\tau'}^{\tau''} |\phi'(t)|^n dt \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}.$$

Пусть

$$\alpha(t) = \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}.$$

Так как $\phi(\tau') = 1$, $\phi(\tau'') = 0$, то

$$1 \leq \int\limits_{\tau'}^{\tau''} |\phi'(t)| dt \leq \Big(\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \alpha(t)|\phi'(t)|^n dt\Big)^{1/n} \Big(\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \alpha(t)^{1/(1-n)} dt\Big)^{(n-1)/n}.$$

Таким образом,

$$I(\phi) \geq \Big(\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \alpha(t)^{1/(1-n)} dt\Big)^{1-n}.$$

Данное неравенство обращается в равенство при специальном выборе функции ϕ

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq \tau' \\ \beta(t), & \text{при } \tau' < t < \tau'' \\ 0, & \text{при } t \geq \tau'' \end{cases}$$

где

$$\beta(t) = \frac{\int\limits_{t}^{\tau''} \alpha(t)^{1/(1-n)} dt}{\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \alpha(t)^{1/(1-n)} dt}.$$

Отсюда,

$$\min_{\phi} I(\phi) = \Big(\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \alpha(t)^{1/(1-n)} dt\Big)^{1-n}$$

и мы получаем

$$c_1^n \int\limits_{B_h(\tau')} |\nabla u^*|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le M^n(\tau'')\big(\lambda(\tau'') - \lambda(\tau')\big)^{1-n} \tag{6.1.14}$$

где

$$\lambda(t) = \int\limits_{\overline{h}+1}^{t} d\tau \Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \Big)^{1/(1-n)}.$$

Предположим, что кратность отображения $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ подчинена условию $N_f(t) \ge n_f \ge 1$ при всех $t > \overline{h}$, где n_f – некоторая постоянная. Интегрируя (6.1.6) при любых $\tau'' > \tau' > \overline{h} + 1$ имеем

$$\lambda(\tau'') - \lambda(\tau') \le \frac{K}{n_f^{1/(n-1)}} \Big(\Phi\big(\frac{1}{K} J(\tau'')\big) - \Phi\big(\frac{1}{K} J(\tau')\big)\Big),$$

где

$$\Phi(t) = \int\limits_{1}^{t} \theta(\tau)^{n/(1-n)} d\tau.$$

Далее мы заметим, что из (6.1.14) при $y = f(x)$ вытекает

$$J(t) = \int\limits_{B_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n \, |f'(x)|^n \, N(f(x), t)^{-1} * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \frac{1}{n_f} \int\limits_{B_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n \, |f'(x)|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le$$

$$\le \frac{K}{n_f} \int\limits_{B_h(t)} |\nabla_y u(f(x))|^n \, J_f(x) * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \le$$

$$\leq \frac{K_O\,K}{n_f} \int\limits_{B_h(t)} |\nabla u^*|^n * \mathbb{1}_{\mathcal{X}} \leq \frac{K_O\,K}{c_1^n n_f} M^n(\tau'')\big(\lambda(\tau'') - \lambda(\tau')\big)^{1-n}.$$

Здесь мы воспользовались также соотношением между $\nabla_y u(f(x))$, $f'(x)$ и $\nabla_x u^*$, описываемых теоремой 1.1.2, и несложной оценкой

$$|\nabla_y u(f(x))|^n\, J_f(x) \leq K_O\, |\nabla_x u^*(x)|^n\,.$$

В предположении, что интегралы (6.1.7), (6.1.8) расходятся, приходим к общему утверждению данного раздела.

Теорема 6.1.2 *Пусть* $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ *– отображение с ограниченным искажением,* $f(\partial\mathcal{X})\subset\partial\mathcal{Y}$ *при* $\partial\mathcal{X}\neq\emptyset$*, и пусть при всех* $t>\overline{h}$ *выполнено* $N_f(t)\geq n_f$*. Тогда либо величина* $M(t)$ *растет столь быстро, что*

$$\frac{n_f^{1/(n-1)}}{K(f)} \leq \liminf_{t',t''\to\infty} \frac{1}{\lambda(t')}\Phi\left(\frac{c_2 M^n(t'')}{(\lambda(t'')-\lambda(t'))^{n-1}}\right)\,, \tag{6.1.15}$$

либо $f(x)\equiv\mathrm{const}$*. Здесь*

$$c_2 = c_1^{-n} n_f^{-1} K_O(f) = n^n K_O\, K^{2n}(f) n_f^{-1} (\frac{\nu_2}{\nu_1})^n.$$

В случае, когда $h:\mathcal{X}\to(0,\infty)$ является специальной фунцией исчерпания, величина $\lambda(t)$ обладает оценку вида (6.1.11) в терминах потока I векторного поля $A(m,\nabla h)$ через h–сферы. В данной ситуации, пользуясь (6.1.12), мы вправе записать

$$\left(\frac{I}{\nu_1}\right)^{1/(1-n)} (t-\overline{h}-1) \leq \lambda(t), \qquad \forall\; t''>t'\geq\overline{h}+1$$

и для всех $t''>t'$

$$\left(\frac{I}{\nu_1}\right)^{1/(1-n)} (t''-t') \leq \lambda(t'')-\lambda(t').$$

Таким образом, соотношение (6.1.15) может быть существенно упрощено.

Именно, полагая $t''=t'+1$, получаем

Следствие 6.1.6 *Предположим, что в условиях теоремы* 6.1.2 *функция* $h : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ *является специальной функцией исчерпания. Тогда либо* $f(x) \equiv \mathrm{const}$, *либо*

$$\left(\frac{n_f\, I}{\nu_1}\right)^{1/(n-1)} K(f)^{-1} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \Phi\left(c_3 M^n(t)\right), \tag{6.1.16}$$

где $c_3 = c_2\, \nu_1^{-1}\, I$.

Предположим, что многообразие $\mathcal{Y}$ подчинено предположениям теоремы 6.1.2. Фиксируем целые $1 \le k \le n \le p$ и рассмотрим область $D \subset \mathbb{R}^n$ вида (1.1.28) для $k < n$, либо вида (1.1.24) при $r_2 = \infty$ для $k = n$. Пусть $\mathcal{B}$ – $(p-n)$-мерное компактное риманово многообразие с краем или без края. Функция h^*, определенная выражением (1.1.23), где h задана равенством (1.1.29), является специальной функцией исчерпания многообразия $\mathcal{X} = D \times \mathcal{B}$.

При этих предположениях, используя (1.1.17), имеем

Следствие 6.1.7 *Пусть* $f(x, b) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *– отображение с ограниченным искажением,* $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$, *и пусть* $N_f(t) \ge n_f$ *при всех* $t > \overline{h}$. *Тогда либо* $f(x) \equiv \mathrm{const}$, *либо* $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$, *а величина* $M_n(t)$, *равная* $M_n(t) = \max_{|x|=t} u^*(x, b)$ *при* $k = n$ *и* $M_k(t) = \max_{d_k(x)=t} u^*(x, b)$ *при* $k < n$, *растет столь быстро, что*

$$\frac{n-1}{n-k}\, C(I, K) \le \liminf_{t\to\infty} t^{(k-n)/(n-1)} \Phi\left(c_3\, M_k^n(t)\right) \quad (k < n), \tag{6.1.17}$$

где

$$C(I, K) \le \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \Phi\big(c_3\, M_n^n(t)\big) \quad (k = n), \tag{6.1.18}$$

и

$$C(I, K) = \left(\frac{n_f\, I}{\nu_1}\right)^{1/(n-1)} K(f)^{-1}.$$

Для **доказательства** соотношения (6.1.17) достаточно заметить, что если точка $(x, b) \in \Sigma_h(t)$, то

$$d_k(x) = \frac{n-k}{n-1} t^{\frac{n-1}{n-k}}.$$

Полагая $\frac{n-k}{n-1}\, t^{\frac{n-1}{n-k}} = \tau$, имеем

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Phi\Big(c_3\, M^n(t+1)\Big) = \liminf_{\tau\to\infty} \frac{n-k}{n-1}\tau^{\frac{k-n}{n-1}}\Phi\Big(c_3\, M_k^n(\tau)\Big).$$

Утверждение следует из (1.1.17).

В случае (6.1.18), обозначая $\ln\frac{\tau}{r_1} = t$, находим

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Phi\Big(c_3\, M^n(t+1)\Big) = \liminf_{\tau\to\infty} \frac{1}{\ln\tau}\Phi\Big(c_3\, M_n^n(\tau)\Big).$$

$\square$

Заметим, что в специальном случае, когда $\mathcal{X}$ есть неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и область роста $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ есть полупространство $y_1 \geq 1$, можно положить $u(y) = y_1$. Пользуясь обозначениями примера 6.1.1, имеем

$$\theta(t) = \Big(\frac{\omega_{n-1}}{2}\Big)^{1/n} n^{(n-1)/n} t^{(n-1)/n}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{n}\Big(\frac{2}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \ln t.$$

Пусть

$$h(x) = \Big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\Big)^{1/2},\ 1 \leq p \leq n,\ M(t) = \max\{f_1(x),\ x \in \Sigma_h(t)\}.$$

Заметим, что $|\nabla h(x)| \equiv 1$. Тогда

$$\lambda(t) = \int\limits_{\overline{h}+1}^{t} |\Sigma_h(\tau)|^{1/(1-n)} d\tau, \quad |\Sigma_h(\tau)| = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_h(\tau))\,.$$

В случае, когда $\mathcal{X}$ является конусом в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке $x = 0$, выбирая $p = n$, $\tau'' = 2\tau'$, приходим к утверждению

Следствие 6.1.8 *Если $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением и его кратность $N_f(t) \geq n_f$ при всех $t > \overline{h}$ и $f_1(x)\,|_{\partial\mathcal{X}} \leq 1$, то либо $f_1(x) \leq 1$ всюду в $\mathcal{X}$, либо*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln M(t)}{\ln t} \geq \Big(\frac{\omega_{n-1}}{2}\Big)^{1/(n-1)} \frac{n_f^{1/(n-1)}}{K(f)|\Sigma_h(1)|^{1/(n-1)}}. \tag{6.1.19}$$

Если $\mathcal{X}$ есть полуцилиндр $\Delta \times \mathbb{R}^1_+$ в $\mathbb{R}^n$, где Δ – ограниченная область в гиперплоскости $x_1 = 0$, полагая $p = 1$, $\tau'' = \tau' + 1$, получаем

Следствие 6.1.9 *Если $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением с кратностью $N_f(t) \geq n_f$ при всех $t > \overline{h}$ and $f_1(x)\,|_{\partial\mathcal{X}} \leq 1$, то либо $f_1(x) \leq 1$ в $\mathcal{X}$, либо*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln M(t)}{t} \geq \left(\frac{\omega_{n-1}}{2}\right)^{1/(n-1)} \frac{n_f^{1/(n-1)}}{K(f)|\Delta|^{1/(n-1)}}\,. \tag{6.1.20}$$

6.2 Асимптотические свойства

Доказываются различные варианты теорем типа Фрагмена – Линделефа для случая многообразий $\mathcal{Y}$, не обладающих специальным изопериметическим свойством. Доказываются обобщения классической теоремы Данжуа – Карлемана – Альфорса о поведении целой голоморфной функции заданного порядка [212], обобщения известных теорем Вимана и Аримы [73], [205].

6.2.1 Принцип Фрагмена – Линделефа

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – n-мерные некомпактные римановы многообразия, и пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением. Предположим, что $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$ и что $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$.

Пусть $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – локально липшицева функция исчерпания $\mathcal{X}$. Для произволного $\tau > 0$ полагаем

$$V(\tau) = \int\limits_{\tau < h(x) < \tau+1} |\nabla h(x)|^n * \mathbb{1}.$$

Зафиксируем функцию роста $u = u(y) : \mathcal{Y} \to (0, \infty)$ на многообразии $\mathcal{Y}$. Функция $u(y)$ является решением уравнения (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) со структурными постоянными $p = n, \nu_1, \nu_2$. В соответствии с леммой 15.43 из [170] функция $u(f(x))$ также является решением подобного уравнения со структурными постоянными, определяемыми посредством (6.1.3). Здесь $u(f(x))|_{\partial\mathcal{X}=1}$.

Положим

$$M(\tau) = \max_{x \in \Sigma_h(\tau)} u(f(x)).$$

Теорема 6.2.1 *Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ и отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ подчинены условию*

$$\liminf_{\tau\to\infty} V(\tau) \exp\Big\{-C \int^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} = 0, \qquad (6.2.1)$$

где

$$C = \left(\frac{\nu_2}{K_I(f)}\right)^{n/(n-1)} \left(\frac{n-1}{n} + \left(\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 K_O^2(f) K_I^2(f) - 1\right)^{1/2}\right)^{-1}$$

– постоянная. Тогда либо $f(x) \equiv \mathrm{const}$ *на* $\mathcal{X}$*, либо* $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ *и*

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)V^{1/n}(\tau)\exp\Big\{-\frac{C}{n}\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0. \qquad (6.2.2)$$

В частности, если $h(x)$ *есть специальная функция исчерпания* $\mathcal{X}$*, то либо* $f(x) \equiv \mathrm{const}$*, либо* $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ *и*

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\exp\Big\{-\frac{C}{n}\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0. \qquad (6.2.3)$$

Данное утверждение есть специальный частный случай теоремы 4.1.2. Заметим, однако, что

$$\int\limits_{\tau<h(x)<\tau+1} |\nabla h(x)|^n |f(x)|^n * \mathbb{1} \le M^n(\tau+1)V(\tau)$$

и либо величина $M(\tau)$ удовлетворяет (6.2.2), либо $u(f(x)) \equiv 1$. Последняя альтернатива возможна тогда и только тогда, когда f отображает в точку границы $\partial\mathcal{Y}$.

Если $h(x)$ – специальная функция исчерпания, то, как замечено выше при доказательстве теоремы 4.1.2, условие (6.2.1) выполняется в случае, если многообразие $\mathcal{X}$ подчинено предположению

$$\int^{\infty}\lambda_n(\Sigma_h(t))dt = \infty. \qquad (6.2.4)$$

Пусть $\mathcal{A}$ – k-мерное риманово многообразие с непустым краем, $k \ge 1$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{X} = \mathcal{A}\times\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Выберем специальную функцию исчерпания $h(a,x) = h(|x|)$ на $\mathcal{X}$, описанную в примере 1.1.8. Здесь $p = k+n$ и $h(|x|) = |x|^{k/(k+n+1)}$.

Следствие 6.2.1 *Пусть* $f(a,x) : \mathcal{A}\times\mathbb{R}^n \to \mathcal{Y}$ *– отображение с ограниченным искажением, для которого* $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$*. Пусть* $u = u(y)$ *– функция роста на многообразии* $\mathcal{Y}$*. Тогда либо* $f(a,x) \equiv \mathrm{const}$ *на* $\mathcal{X}$*, либо* $f(a,x) \not\equiv \mathrm{const}$ *и*

$$\liminf_{r\to\infty}\max_{(a,x):|x|=r} u(f(a,x))\exp\Big\{-\frac{C}{k+n}\lambda_{k+n}(\mathcal{A})r\Big\} > 0.$$

Здесь C – постоянная из теоремы 6.2.1.

Для **доказательства** достаточно воспользоваться равенством (4.1.20) при $n = 1$ и неравенством (4.1.22) при $n \geq 2$.

Пусть $V \subset S^{n-1}(1)$ – область с непустым краем и пусть $\mathcal{X} = (r_1, r_2) \times U$ – искривленное риманово произведение, описываемое в примере 1.1.9. Выберем специальную функцию исчерпания $h(|x|)$, определяемую соотношением (1.1.27).

Следствие 6.2.2 *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченныи искажением, $f(\partial\mathcal{X}) \subset \partial\mathcal{Y}$. Пусть $u(y)$ – функция роста на многообразии $\mathcal{Y}$. Предположим, что искривленное произведение $\mathcal{X}$, удовлетворяющее условию* (1.1.21). *Тогда либо $f(x) \equiv \mathrm{const}$, или $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ и*

$$\liminf_{r\to\infty} \max_{|x|=r} u(f(x)) \exp\Big\{-\frac{C}{n}\lambda_n(U)\int^r \frac{dr}{\beta(r)}\Big\} > 0,$$

где C – постоянная из теоремы 6.2.1.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 6.2.1 и соотношением (4.1.24). □

Приведем некоторые варианты сформулированной выше теоремы, соответствующие специальным выборам функции роста. Пусть $1 < p < n$. В качестве области роста мы выберем внешность цилиндра

$$\mathcal{Y} = \Big\{y = (y_1, \dots, y_p, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{p} y_i^2 > 1\Big\},$$

а в качестве функции роста — функцию

$$u(y) = \Big(\sum_{i=1}^{p} y_i^2\Big)^{(n-p)/(2(n-1))}.$$

Несложно проверить, что эта функция является решением уравнения (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) со структурными постоянными $p = n$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

Следствие 6.2.3 *Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию* (6.2.4). *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, обладающее свойством*

$$\limsup_{x \to x_0} \Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \Big)^{1/2} \le 1 \quad \text{при всех} \quad x_0 \in \partial \mathcal{X}.$$

Если

$$\liminf_{\tau \to \infty} M(\tau+1) V(\tau)^{1/n} \exp\Big\{ -\frac{C(n-1)}{n(n-p)} \int^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t)) dt \Big\} = 0\,,$$

то

$$\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \Big)^{1/2} \le 1 \quad \text{при всех} \quad x \in \mathcal{X}\,.$$

В частности, если $h(x)$ – специальная функция исчерпания $\mathcal{X}$, то или $\big(\sum\limits_{i=1}^{p} f_i^2(x)\big)^{1/2} \le 1$ при всех $x \in \mathcal{X}$, или $\sup\limits_{x} \big(\sum\limits_{i=1}^{p} f_i^2(x)\big)^{1/2} > 1$ и

$$\liminf_{\tau \to \infty} M(\tau+1) \exp\Big\{ -\frac{C(n-1)}{n(n-p)} \int^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t)) dt \Big\} > 0.$$

Здесь

$$M(t) = \sup_{x \in \Sigma_h(t)} \Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \Big)^{1/2}$$

и

$$C = \Big(\frac{1}{K_I(f)} \Big)^{n/(n-1)} \Big(\frac{n-1}{n} + (K_O^2(f) K_I^2(f) - 1)^{1/2} \Big)^{-1}.$$

Доказательство. Предположим, что $(\sum\limits_{i=1}^{p} f_i^2(x_0))^{1/2} > 1$ в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{X}$. Функция $h(x)$ есть функция исчерпания для каждой компоненты $\mathcal{O}$ множества

$$\Big\{ x \in \mathcal{X} : \Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) \Big)^{1/2} > 1 \Big\}.$$

Применим теорему 6.2.1 к области $\mathcal{O}$. Заметим, что

$$V(\tau) \geq \int\limits_{\mathcal{O}\cap\{\tau<h(x)<\tau+1\}} |\nabla h(x)|^n * \mathbb{1},$$

и воспользуемся (6.2.2), (6.2.3). Нужное заключение легко вытекает из сказанного. $\square$

Пример 6.2.1 Пусть Δ – область в гиперплоскости $x_1 = 0$ и $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – полуцилиндр $\Delta \times \mathbb{R}^1_+$. Ясно, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет предположению (6.2.1). Функция $h(x) = x_1$ есть специальная функция исчерпания полуцилиндра. Замечая, что $\lambda_n(\Sigma_h(t)) \equiv \lambda_n(\Delta)$, приходим к следующему утверждению.

$\square$

Следствие 6.2.4 *Если $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением и*

$$\limsup_{x\to x_0}\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^{1/2} \leq 1$$

при всех $x_0 \in \partial\mathcal{X}$ и

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau)\exp\Big\{-\frac{C(n-1)}{n(n-p)}\lambda_n(\Delta)\tau\Big\} = 0,$$

то

$$\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^{1/2} \leq 1$$

при всех $x \in \mathcal{X}$.r Здесь $M(t)$ и C – величины, введенные в следствии 6.2.3.

Пример 6.2.2 В случае, когда $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ есть конус с вершиной в точке $x = 0$, выберем $h(x) = \ln|x|$. Область $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию (6.2.1). Функция $\ln|x|$ является специальной функцией исчерпания конуса. С использованием преобразования подобия находим

$$\lambda_n(\Sigma_h(t)) = \frac{\Lambda}{t}, \quad \Lambda = \lambda_n(\Sigma_h(1))$$

при всех $t > 0$.

□

На основании теоремы 6.2.1 приходим к следующему утверждению.

Следствие 6.2.5 *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, для которого выполнено*

$$\limsup_{x\to x_0}\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^{1/2} \le 1\,.$$

Тогда если

$$\liminf_{\tau\to 0}\frac{M(\tau)}{\tau^\alpha} = 0, \quad \alpha = \frac{C(n-1)}{n(n-p)}\Lambda\,,$$

то

$$\Big(\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)\Big)^{1/2} \le 1$$

при всех $x \in \mathcal{X}$.

Здесь $M(t)$ и C – величины, определенные в следствии 6.2.3.

Пример 6.2.3 Случай $p = 1$ был рассмотрен выше. Рассмотрим теперь случай $p = n$, остающийся открытым. В качестве области роста может быть выбрана внешность шара $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| > 1\}$, а в качестве функции роста можно положить $u(y) = \ln|y|$. Данная функция является решением уравнения (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) со структурными постоянными $p = n$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

□

Из теоремы 6.2.1 получаем следующий результат.

Следствие 6.2.6 *Пусть $\mathcal{X}$ – многообразие, удовлетворяющее условию* (6.2.1). *Предположим, что отображение с ограниченным искажением $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ таково, что*

$$\limsup_{x\to x_0}|f(x)| \le 1$$

при всех $x_0 \in \partial\mathcal{X}$. Тогда если

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)V^{1/n}(\tau)\exp\Big\{-\frac{C}{n}\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} = 0\,,$$

то $|f(x)| \le 1$ *всюду на* $\mathcal{X}$ *.*

В частности, если $h(x)$ *есть специальная функция исчерпания и если*

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\exp\Big\{-\frac{C}{n}\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t))dt\Big\}=0\,,$$

то $f(x) \le 1$ *при всех* $x \in \mathcal{X}$*.*

Здесь C *– постоянная из следствия* 6.2.3 *и*

$$M(t)=\sup_{x\in\Sigma_h(t)}\ln|f(x)|.$$

Полагая, как и выше, $\mathcal{X}=\Delta\times\mathbb{R}^1_+$ приходим к утверждению.

Следствие 6.2.7 *Если* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с ограниченным искажением и*

$$\limsup_{x\to x_0}|f(x)|\le 1$$

при всех $x_0 \in \partial\mathcal{X}$*, то либо* $|f(x)| \le 1$ *всюду на* $\mathcal{X}$*, либо* $|\sup_{\mathcal{X}} f(x)| > 1$ *и*

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau)\exp\Big\{-\frac{C}{n}\lambda_n(\Delta)\tau\Big\}>0\,,$$

где $M(t)$ *и* C *– величины, определенные в следствии* 6.2.3.

В случае конуса $\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке $x=0$, как в следствии 6.2.5, получаем.

Следствие 6.2.8 *Пусть* $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с ограниченным искажением, для которого*

$$\limsup_{x\to x_0}|f(x)|\le 1$$

при всех $x_0 \in \partial\mathcal{X}$*. Тогда если*

$$\liminf_{\tau\to\infty}\frac{M(\tau)}{\tau^{\alpha}}=0,\quad \alpha=\frac{C}{n}\lambda_n(\Delta)\,,$$

то $|f(x)| \le 1$ *всюду на* $\mathcal{X}$*.*

6.2.2 Задача Данжуа – Карлемана – Альфорса

Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное некомпактное риманово многообразие без края и $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – его функция исчерпания.

Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением. По аналогии с целыми голоморфными функциями на плоскости (см. [31, стр. 223]) введем следующие понятия.

Пусть Γ – непрерывная кривая в $\mathcal{X}$, определяемая уравнением $x = x(s)$, $0 \leq s < \infty$, $h(x(s)) \to \infty$ при $s \to \infty$. Если существует конечное либо бесконечное значение $a \in \overline{\mathbb{R}}^n$ такое, что

$$\lim_{x(s)\in\Gamma,\ s\to\infty} f(x(s)) = a,$$

то a называется *асимптотическим значением* отображения $f(x)$, а кривая Γ — *асимптотической кривой*. Пару $\{\Gamma, a\}$ будем называть *асимптотическим местом*. Два асимптотических места эквивалентны, если

1) $a_1 = a_2 = a$,

2) существует последовательность дуг $\{\gamma_k\}$, $\gamma_k \subset \mathcal{X}$, один конец которых лежит на Γ_1, а другой – на Γ_2, и такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \min_{x\in\gamma_k} h(x) = \infty, \qquad \lim_{\substack{h(x)\to\infty \\ x\in\cup_k\gamma_k}} f(x) = a.$$

Задача Данжуа – Карлемана – Альфорса состоит в описании связей между скоростью роста $|f(x)|$ на $\mathcal{X}$ и числом различных асимптотических мест отображения с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$. В случае целых голоморфных функций на плоскости окончательное решение этой проблемы было дано Альфорсом [117].

В случае отображений с ограниченным искажением $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и бесконечных асимптотических значений соответствующее обобщение теоремы Альфорса было дано В.М. Миклюковым [72].

Рикман и Холопайнен [175] построили примеры, показывающие, что не существует обобщений теоремы Альфорса на случай отображений с ограниченным искажением $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, имеющих конечные асимптотические значения.

Ниже мы доказываем теорему Альфорса для отображений с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ с бесконечными асимптотическими значениями.

Для произвольного $\tau \in (0, \infty)$ пусть, как и выше,

$$V(\tau) = \int\limits_{\tau < h(x) < \tau+1} |\nabla h(x)|^n * \mathbb{1}.$$

Далее обозначаем

$$M(\tau) = \max_{x \in \Sigma_h(\tau)} \ln^+ |f(x)|, \quad \ln^+ \alpha = \max\{0, \ln \alpha\}.$$

Теорема 6.2.2 *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением. Предположим, что при некотором $N = 2, 3, \ldots$ многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{\tau \to \infty} V(\tau) \exp\Big\{ -C \int\limits^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); N)\, dt \Big\} = 0, \tag{6.2.5}$$

где C – постоянная из теоремы 6.2.1. Тогда, если

$$\liminf_{\tau \to \infty} M(\tau) V(\tau)^{1/n} \exp\Big\{ -C \int\limits^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); N)\, dt \Big\} = 0, \tag{6.2.6}$$

то число различных асимптотических мест вида $\{\Gamma, \infty\}$ отображения $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ не превышает $N - 1$.

В частности, пусть $h(x)$ – специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{X}$ такая, что

$$\int\limits^{\infty} \lambda_n(\Sigma_h(t); N) dt = \infty. \tag{6.2.7}$$

Если

$$\liminf_{r \to \infty} \max_{h(x) = r} \ln^+ |f(x)| \, \exp\Big\{ -C \int\limits^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); N) dt \Big\} = 0, \tag{6.2.8}$$

то число различных асимптотических мест вида $\{\Gamma, \infty\}$ для отображения $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ не превышает $N - 1$.

Доказательство. Заметим сперва, что функция $\ln |f(x)|$ является решением в области $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$ уравнения (2.19), (2.23), (2.24) со структурными постоянными $p = n$, $\nu_1 = K_O(f)$, $\nu_2 = 1/K_I(f)$. Здесь $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} : f(x) = 0\}$.

Предположим, что отображение $f(x)$ имеет как минимум L различных асимптотических мест $\{\Gamma_1, \infty\}, \ldots, \{\Gamma_L, \infty\}$. В соответствии с принципом максимума из следствия 2.3.1 множество

$$\{x \in \mathcal{X} : \ln |f(x)| > 1\}$$

не имеет компонент с компактными замыканиями. Таким образом, существует как минимум L различных компонент $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_L$, каждая из которых содержит одну из кривых Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, L$, начинающихся с достаточно больших значений параметра $s \in (0, \infty)$.

На границе каждой из областей $\mathcal{O}_k$ функция $\ln |f(x)| - 1 = 0$. Применив теорему 4.1.4, заключаем, что $L \leq N - 1$. □

Пример 6.2.4 Рассмотрим сначала случай, в котором $\mathcal{X} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{A}$ есть k-мерное риманово многообразие, $1 \leq k < n$. Выберем специальную функцию исчерпания $h(|x|)$ как в примере 1.1.8. Здесь $p = k + n$ и $h(r) = r^{k/(k+n-1)}$, $r = |x|$.

Пользуясь соотношениями (4.1.30) и (4.1.32) для N-средних основной частоты, при $\tau_0 < \tau$ имеем

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_{k+1}(\Sigma_h(t); N)dt \geq \lambda_{k+1}(\mathcal{A}; N) \int\limits_{\tau_0}^{\tau} dt, \quad \text{для} \quad n = 1$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_{k+n}(\Sigma_h(t); N)dt \ &\geq \lambda_{k+n}(\mathcal{A}; N) \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{dt}{h'(r(t))} = \\ &= \lambda_{k+n}(\mathcal{A}; N) \int\limits_{\tau_0}^{\tau} r'(t)\, dt, \quad \text{для} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Полагая $\tau \to \infty$, видим, что требование (6.2.7) действительно удовлетворяется.

□

Поскольку при $n=1$ имеет место равенство

$$\max_{h(|x|)=r} \ln^+ |f(a,x)| \exp\{-C\lambda_{k+1}(\mathcal{A};N)\, r\}$$

$$= \max_{|x|=r} \ln^+ |f(a,x)| \exp\{-C\lambda_{k+1}(\mathcal{A};N)\, r\}\,,$$

а при $n \geq 2$ — равенство

$$\max_{h(|x|)=r} \ln^+ |f(a,x)| \exp\{-C\lambda_{k+n}(\mathcal{A};N) r(\tau)\}$$

$$= \max_{|x|=r^{(k+n-1)/k}} \ln^+ |f(a,x)| \exp\{-C\lambda_{k+n}(\mathcal{A};N) \tau^{(k+n-1)/k}\}\,,$$

то условие (6.2.8) принимает вид

$$\liminf_{r\to\infty} \max_{|x|=r} \ln^+ |f(a,x)| \exp\{-C\lambda_{k+n}(\mathcal{A};N) r\} = 0. \tag{6.2.9}$$

Таким образом, мы имеем

Следствие 6.2.9 *Пусть* $f(a,x)\,:\,\mathcal{A}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k+n}$ *– отображение с ограниченным искажением, удовлетворяющее* (6.2.9). *Тогда число различных асимптотических мест* f *вида* $\{\Gamma,\infty\}$ *не превышает* $N-1$.

6.2.3 Искривленные произведения

Проблема нахождения точного значения величины $\lambda_n(\Sigma_h(t);N)$, либо хороших ее оценок является весьма трудной даже для многообразий $\mathcal{X}$, $\dim\mathcal{X}\geq 3$, простого вида. Таким образом, представляет определенный интерес в изучении многообразий, для которых такие оценки имеются. Ниже будет изучаться случай искривленных римановых произведений специального вида, где могут быть использованы оценки, найденные выше с использованием изопериметрических методов.

Рассмотрим сферическое кольцо

$$D = \{x=(r,\theta)\in\mathbb{R}^n : r_1<r<r_2,\ \theta\in S^{n-1}(1)\}, \quad 0\leq r_1<r_2\leq\infty,$$

и риманово многообразие $\mathcal{X} = (D, ds^2_{\mathcal{X}})$, где квадрат элемента длины задан выражением

$$ds^2_{\mathcal{X}} = \alpha^2(r)dr^2 + \beta^2(r)dl^2_{n-1},\ r\in(r_1,r_2),\ r_1\geq 0,\ r_2<\infty,$$

и dl_{n-1} – элемент длины на единичной сфере $S^{n-1}(1)$, а функции $\alpha(r)$, $\beta(r) > 0$ непрерывно дифференцируемы.

В частном случае $\alpha(r) \equiv 1$, $\beta(r) = r$ метрика $ds^2_{\mathcal{X}}$ совпадает с метрикой $\mathbb{R}^n$, записанной в сферических координатах. В случае $\alpha(r) = \beta(r) \equiv 1$ данное многообразие изометрично цилиндру $(r_1, r_2) \times S^{n-1}(1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Как показано в примере 1.1.9, при выполнении условия (1.1.26) функция $h(r) = h(|x|)$, определенная соотношением (1.1.27), является специальной функцией исчерпания $\mathcal{X}$.

Для всякого $\tau > 0$ h-сфера $\Sigma_h(\tau)$ в $\mathcal{X}$ является $(n-1)$-мерной сферой в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r(\tau) = h^{-1}(r)$ и индуцированной метрикой

$$ds^2_{\mathcal{X}}\,|_{r=r(\tau)} = \beta^2(r(\tau))dl^2_{n-1}\,,$$

где $h^{-1}(\tau)$ есть функция, обратная к $\tau = h(r)$.

Таким образом, в силу соображений подобия, заключаем, что

$$\lambda_n(S^{n-1}(\tau); N) = \lambda_n(S^{n-1}(\beta(r(\tau))); N) =$$
$$= \frac{1}{\beta(r(\tau))}\lambda_n(S^{n-1}(1); N) = \frac{\lambda(N)}{\beta(r(\tau))},$$

где обозначено $\lambda(N) = \lambda_n(S^{n-1}(1); N)$.

На основании соотношения 3.3.22 имеем

$$\lambda_n(\Sigma_h(\tau); N) = \frac{1}{\beta(r(\tau))h'(r(t))}\lambda_n(S^{n-1}(1); N).$$

Далее заметим, что

$$\int^{\infty} \lambda_n(\Sigma_n(\tau); N)d\tau \geq \lambda(N)\int^{\infty} \frac{r'(\tau)d\tau}{\beta(r(\tau))} = \lambda(N)\int^{r_2} \frac{dr}{\beta(r)}.$$

Условие (6.2.8) на многообразие $\mathcal{X}$ можно переписать в виде

$$\int^{r_2} \frac{dr}{\beta(r)} = \infty. \tag{6.2.10}$$

Теперь имеем

$$\max_{h(|x|)=r} \ln^+|f(x)| \exp\Big\{-C\int^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); N)dt\Big\}$$

$$\geq \max_{|x|=r(\tau)} \ln^+ |f(x)| \exp\Big\{-C\lambda(N) \int^{r(\tau)} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\}.$$

(Постоянная C определена в теореме 6.2.1.)

Таким образом, условие (6.2.8) на скорость роста отображения f будет выполненным, если

$$\liminf_{r\to r_2} \max_{|x|=r} \ln^+ |f(x)| \exp\Big\{-C\lambda(N) \int^{r} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\} = 0. \tag{6.2.11}$$

Тем самым доказано утверждение.

Следствие 6.2.10 *Пусть* $\mathcal{X} = (D, ds^2_{\mathcal{X}})$ *– искривленное риманово произведение указанного вида, обладающее свойствами* (1.1.26), (6.2.10). *Предположим, что отображение с ограниченным искажением* $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* (6.2.11). *Тогда* $f(x)$ *имеет не более* $N-1$ *различных асимптотических мест вида* $\{\Gamma, \infty\}$.

Отметим специальный случай данного утверждения, когда многообразие $\mathcal{X} = (0,\infty) \times S^{n-1}(1)$ есть цилиндр. Здесь $\alpha(r) = \beta(r) \equiv 1$.

Описанное выше утверждение непосредственно влечет

Следствие 6.2.11 *Если отображение с ограниченным искажением*

$$f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$$

удовлетворяет условию

$$\liminf_{r\to\infty} \max_{|x|=r} \ln^+ |f(x)| \exp\{-C\lambda(N) r\} = 0,$$

то оно имеет не более чем $N-1$ *различных асимптотических мест вида* $\{\Gamma, \infty\}$ *вдоль кривых* Γ *на* $\mathcal{X}$, *уходящих в бесконечность* ∞.

Следующий случай был ранее изучен в [72].

Следствие 6.2.12 *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с ограниченным искажением такое, что*

$$\liminf_{r\to\infty} \max_{|x|=r} \ln^+ |f(x)| r^{-C\lambda(N)} = 0. \tag{6.2.12}$$

Тогда $f(x)$ *имеет не более чем* $N-1$ *различных асимптотических мест вида* $\{\Gamma, \infty\}$.

Для **доказательства** достаточно положить $\alpha(r) = 1$, $\beta(r) = r$, $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$ в следствии 6.2.11.

6.2.4 К контрпримеру Рикмана – Холопайнена

Контрпример, построенный З. Рикманом и И. Холопайненом [175], показывает, что при выполнении условия (6.2.12) отображение с ограниченным искажением

$$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad n \geq 3\,,$$

может иметь бесконечное число различных асимптотичеких мест вида $\{\Gamma, a_i\}$, где $|a_i| < \infty$. Данный факт связан с отсутствием теоремы Линделефа для ограниченных отображений с ограниченным искажением в размерностях $n \geq 3$.

Здесь имеется в виду теорема Линделефа утверждающая, что *для всякой ограниченной голоморфной функции, обладающей конечными пределами вдоль двух простирающихся на бесконечность кривых, эти пределы равны, а функция стремится к тому же самому пределу по всей области, расположенной между этими кривыми.*

Мы дадим следующий вариант теоремы Альфорса для отображений с конечными асимптотическими местами, сраведливый во всех размерностях и учитывающий эффект Рикмана – Холопайнена. Однако, в этом случае предполагается, что асимптотические значения a_i суть исключительные значения Пикара для отображения $f(x)$, то есть, $f(x) \neq a_i$ при всех $x \in \mathcal{X}$. Ясно, что исключительные значения $a \in \mathbb{R}^n$ в смысле Пикара индуцируют появление соответствующих асимптотических мест (см. пример 6.3.3 ниже).

Теорема 6.2.3 *Пусть $\mathcal{X}$ – связное некомпактное риманово многообразие без края и пусть $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – его функция исчерпания.*

Пусть $y = f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, имеющее $L \geq 0$ различных конечных асимптотических мест

$$\{\Gamma_1, a_1\}, \{\Gamma_2, a_2\}, \ldots, \{\Gamma_L, a_L\},$$

и $N \geq 0$ различных бесконечных асимптотических мест

$$\{\Gamma_{L+1}, \infty\}, \ldots, \{\Gamma_{L+N}, \infty\}\,,$$

где $f(x) \neq a_i$ при всех $i = 1, \ldots, L$ и всех $x \in \mathcal{X}$.

Предположим, что многообразие $\mathcal{X}$ *удовлетворяет предположению*

$$\lim_{\tau\to\infty} V(\tau)\exp\Big\{-C\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t);Q)dt\Big\}=0,$$

где $Q\ge 1$ *есть целое и* C *– постоянная из теоремы* 6.2.1.

Положим

$$M(\tau)=\max_{h(x)=\tau}\Big\{\ln\frac{1}{|f(x)-a_1|},\ldots,\ln\frac{1}{|f(x)-a_L|},\ln|f(x)|\Big\}. \qquad (6.2.13)$$

Если теперь

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)V(\tau)^{1/n}\exp\Big\{-C\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t);Q)dt\Big\}=0\,, \qquad (6.2.14)$$

то $L+N\le Q-1$.

В частности, пусть $h(x)$ *– специальная функция исчерпания на* $\mathcal{X}$ *и многообразие* $\mathcal{X}$ *удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty}\lambda_n(\Sigma_h(t);Q)dt=\infty.$$

Если

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\exp\Big\{-C\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t);Q)dt\Big\}=0\,,$$

то $L+N\le Q-1$.

Доказательство. Положим $\mathcal{O}_i=\{x\in\mathcal{X}:|f(x)-a_i|<\varepsilon_i\}$, $i=1,\ldots,L$, и $\mathcal{X}_0=\{x\in\mathcal{X}:|f(x)|>1/\varepsilon_0\}$. Как в теореме 6.2.2, заметим сначала, что функции $\ln(1/|f(x)-a_i|)$, $i=1,\ldots,L$, и $\ln|f(x)|$, соответственно, суть решения уравнения (2.2.18), (2.2.15), (2.2.16) со структурными постоянными $p=n$, $\nu_1=K_O(f)$, $\nu_2=1/K_I(f)$.

Поскольку асимптотические места $\{\Gamma_i,a_i\}$ различны, то при достаточно малых ε_i множества $\mathcal{O}_i$ взаимно не пересекаются и мы находимся в условиях теоремы 4.1.4. На основании указанной теоремы легко делаем нужное заключение. $\square$

6.3 Дополнения к теореме Данжуа – Карлемана – Альфорса

6.3.1 Целые функции

Из теоремы Данжуа – Карлемана – Альфорса вытекает, что всякая целая голоморфная функция $f(z)$ порядка ρ имеет не более, чем $[2\rho]$ различных асимптотических мест, где $[r]$ означает целую часть числа r. Эта теорема не содержит информации при $2\rho < 1$. В данном случае такая информация дается теоремой А. Вимана [247], утверждающей, что каждая целая голоморфная функция $f(z)$ порядка $\rho < \frac{1}{2}$ обладает свойством

$$\limsup_{r\to\infty} \min_{|z|=r} |f(z)| = \infty.$$

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – n-мерные некомпактные римановы многообразия без края. Пусть $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{X}$ и $u = u(y)$ – неотрицательная функция роста многообразия $\mathcal{Y}$, являющаяся субрешением уравнения (2.2.18), (2.2.19), (2.2.15) со структурными постоянными $p = n$, ν_1, ν_2.

Следующее утверждение обобщает теорему Вимана (для отображений с ограниченным искажкнием евклидова пространства см. [73]).

Теорема 6.3.1 *Пусть* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *– отображение с ограниченным искажением,* $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$. *Предположим, что многообразие* $\mathcal{X}$ *таково, что*

$$\int^{\infty} \lambda_n(\Sigma_h(t); 1)dt = \infty. \tag{6.3.1}$$

Если

$$\liminf_{\tau\to\infty} \max_{h(x)=\tau} u(f(x)) \exp\Big\{-C \int^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); 1)dt\Big\} = 0\,, \tag{6.3.2}$$

то

$$\limsup_{\tau\to\infty} \min_{h(x)=\tau} u(f(x)) = \infty.$$

Здесь C *– постоянная из теоремы* 6.2.1.

Доказательство. Предположим, что

$$\limsup_{\tau\to\infty} \min_{x\in\Sigma_h(\tau)} u(f(x)) = K < \infty.$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{X} : u(f(x)) > qK\},\ 0 < q < 1.$$

Ясно, что при подходящем выборе постоянной q множество $\mathcal{O}$ не пусто.

В силу принципа максимума для субрешений уравнений описанного вида, множество $\mathcal{O}$ не имеет компонент связности с компактным замыканием. Не умаляя общности можно предполагать, что множество $\mathcal{O}$ связно. Поскольку при достаточно больших τ выполнено условие

$$\mathcal{O} \cap \Sigma_h(\tau) \neq \emptyset\,,$$

мы видим, что

$$\lambda_n(\mathcal{O} \cap \Sigma_h(\tau)) \geq \lambda_n(\Sigma_h(\tau); 1).$$

Тем самым, условие (6.3.1) на многообразие $\mathcal{X}$ влечет, что

$$\int^{\infty} \lambda_n(\mathcal{O} \cap \Sigma_h(\tau))d\tau = \infty.$$

Замечая, что

$$\max_{x\in\Sigma_h(\tau)} u(f(x)) \geq \max_{x\in\Sigma_h(\tau)\cap\mathcal{O}} u(f(x)),$$

в силу (6.3.1), несложно заключить, что

$$\liminf_{\tau\to\infty} \max_{\Sigma_h(\tau)\cap\mathcal{O}} u(f(x)) \exp\Big\{-C\int^{\tau} \lambda_n(\mathcal{O} \cap \Sigma_h(t))dt\Big\} = 0.$$

Пользуясь принципом Фрагмена – Линделефа 4.1.2 для функции $u(f(x))$ в области $\mathcal{O}$, находим $u(f(x)) \equiv qK$ на $\mathcal{O}$. Сказанное противоречит определению области $\mathcal{O}$. □

В качестве первого из следствий данного результата докажем некоторое обобщение теоремы Вимана для отображений с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{X}$ – искривленное риманово произведение.

Пусть $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ и пусть

$$D = \{x = (r,\theta) \in \mathbb{R}^n : r_1 < r < r_2, \theta \in S^{n-1}(1)\} \tag{6.3.3}$$

– кольцевая область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{X} = (r_1, r_2) \times S^{n-1}(1)$ – n-мерное риманово многообразие над D с метрикой

$$ds^2_{\mathcal{X}} = \alpha^2(r)dr^2 + \beta^2(r)dl^2_{n-1},$$

где $\alpha(r),\ \beta(r) > 0$ непрерывно дифференцируемы на $[r_1, r_2)$ и dl_{n-1} – элемент длины на $S^{n-1}(1)$.

Как было показано в примере 1.1.9, при выполнении условия (1.1.26) функция

$$h(|x|) = \int\limits_{r_1}^{|x|} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} dt$$

является специальной функцией исчерпания на $\mathcal{X}$.

Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением. Положим $u(y) = \ln^+ |y|$. Данная функция есть субрешение уравнения (2.2.18) с $p = n$, удовлетворяющее также всем другим необходимым требованиям для функции роста.

В силу соображений подобия, находим

$$\lambda_n(S^{n-1}(\tau); 1) = \frac{1}{\beta(r(\tau))} \lambda_n(S^{n-1}(1); 1)$$

и, далее,

$$\lambda_n(\Sigma_h(\tau); 1) = \frac{\lambda_n(S^{n-1}(1); 1)}{\beta(r(\tau))\ h'(r(\tau))}.$$

Тем самым, требование (6.3.1) на многообразие будет выполнено, если выполнено (6.2.10).

Поскольку

$$\begin{gathered}\max_{h(|x|)=\tau} \ln^+ |f(x)|\ \exp\Big\{-C \int\limits^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t); 1)\, dt\Big\} \le \\ \le \max_{|x|=r(\tau)} \ln^+ |f(x)|\ \exp\Big\{-C\, \lambda_n(S^{n-1}(1); 1) \int\limits^{r(\tau)} \frac{dr}{\beta(r)}\Big\},\end{gathered} \tag{6.3.4}$$

то для (6.3.2) достаточно, чтобы

$$\liminf_{r \to r_2} \max_{|x|=r}\ \ln^+ |f(x)|\ \exp\Big\{-C\, \lambda_n(S^{n-1}(1); 1) \int\limits^{r} \frac{dt}{\beta(t)}\Big\} = 0. \tag{6.3.5}$$

В этом случае получаем

Следствие 6.3.1 *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$, – отображение с ограниченным искажением искривленного риманова произведения $\mathcal{X} = (r_1, r_2) \times S^{n-1}(1)$ и $h(|x|)$ – специальная функция исчерпания на $\mathcal{X}$. Если многообразие $\mathcal{X}$ обладает свойством* (6.2.10), *а отображение $f(x)$ подчинено условию* (6.3.2), *то*

$$\limsup_{r \to r_2} \min_{|x|=r} |f(x)| = \infty.$$

Пример 6.3.1 Предположим, что в условиях примера 6.2.3 выполнено $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, а функции $\alpha(r) = \beta(r) \equiv 1$, то есть, $\mathcal{X} = (0, \infty) \times S^{n-1}(1)$ есть n-мерный полуцилиндр. В качестве специальной функции исчерпания многообразия $\mathcal{X}$ мы можем выбрать $h(|x|) = |x|$. Тогда условие (6.2.10) на многообразие с очевидностью выполняется.

Предположение (6.3.2) об отображении f влечет, что

$$\liminf_{r \to \infty} \max_{|x|=r} \ \ln^+ |f(x)| \, e^{-C\lambda_n(S^{n-1}(1);1)r} = 0. \tag{6.3.6}$$

$\square$

Имеет место

Следствие 6.3.2 *Если $\mathcal{X} = (0, \infty) \times S^{n-1}(1)$ – полуцилиндр и $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$, удовлетворяющее условию* (6.3.6), *то*

$$\limsup_{r \to \infty} \min_{|x|=r} |f(x)| = \infty.$$

Пример 6.3.2 Предположим, что в условиях (6.3.3) величины $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, а функции $\alpha(r) \equiv 1$, $\beta(r) = r$, то есть, многообразие есть $\mathbb{R}^n$. В качестве специальной функции исчерпания выберем $h(|x|) = \ln |x|$.

Условие (6.3.5) влечет, что

$$\liminf_{r \to \infty} \max_{|x|=r} \ \ln^+ |f(x)| \, r^{-C\lambda_n(S^{n-1}(1);1)} = 0. \tag{6.3.7}$$

$\square$

Тем самым, имеем

Следствие 6.3.3 *Пусть* $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с ограниченным искажением,* $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$*, обладающее свойством* (6.3.7)*. Тогда*

$$\limsup_{r\to\infty} \min_{|x|=r} |f(x)| = \infty.$$

6.3.2 Размеры асимптотических трактов

Теорема Вимана утверждает о существовании последовательности сфер $S^{n-1}(r_k)$, $r_k \to \infty$, вдоль которой отображение с ограниченным искажением $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, обладающее свойством (6.3.2), стремится к ∞. Расширяя постановку вопроса, можно рассмотреть задачу о размерах множества, вдоль которого такая сходимость имеет место в общем случае (для целых голоморфных функций см. К. Арима [122]). Чтобы сформулировать подобный результат, удобно воспользоваться языком асимптотических трактов в интерпретации Мак-Лейна [196].

Напомним определение Мак-Лейна [196, §2]. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и пусть $w = f(z)$ – голоморфная функция в D. Семейство областей $\{\mathcal{D}(s)\}$ называется *асимптотическим трактом* $f(z)$, если

a) каждое из множеств $\mathcal{D}(s)$ является компонентой связности множества

$$\{z \in D : |f(z)| > s > 0\};$$

b) для любых $s_2 > s_1 > 0$ выполняется $\mathcal{D}(s_2) \subset \mathcal{D}(s_1)$ и $\cap_{s>0}\overline{\mathcal{D}}(s) = \emptyset$.

Два асимптотических тракта $\{\mathcal{D}'(s)\}$ и $\{\mathcal{D}''(s)\}$ рассматриваются как различные, если для некоторого $s > 0$ имеем $\mathcal{D}'(s) \cap \mathcal{D}''(s) = \emptyset$.

Ниже мы расширяем это понятие применительно к отображениям с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых многообразий. Приводим некоторые условия существования асимптотического тракта, изучаем его размеры.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – n-мерные связные некомпактные римановы многообразия и пусть $u = u(y)$ – функция роста на $\mathcal{Y}$, являющаяся положительным субрешением уравнения (2.2.18) со структурными постоянными $p = n$, ν_1, ν_2.

Семейство $\{\mathcal{X}(s)\}$ называется асимптотическим трактом отображения с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, если

a) каждое из множеств $\{\mathcal{X}(s)\}$ является компонентой связности множества
$$\{x \in \mathcal{X} : u(f(x)) > s > 0\};$$

b) при любых $s_2 > s_1 > 0$ выполнено $\mathcal{D}(s_2) \subset \mathcal{D}(s_1)$ и $\cap_{s>0}\overline{\mathcal{D}}(s) = \emptyset$.

Пример 6.3.3 Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, имеющее точку $a \in \mathbb{R}^n$ в качестве исключительного значения Пикара, то есть, $f(x) \neq a$ и $f(x)$ принимает на $\mathcal{X}$ все значения из $B(a,r) \setminus \{a\}$ при некотором $r > 0$.

Множество $\{\infty\} \cup \{a\}$ имеет n-емкость нуль в $\mathbb{R}^n$ и существует решение $g(y)$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ уравнения (2.2.18) такое, что $g(x) \to \infty$ при $x \to a$ или $x \to \infty$ (см. [170, глава 10, полярные множества]). В качестве функции роста на $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ выберем функцию $u(y) = \max(0, g(y))$. Ясно, что эта функция есть субрешение уравнения (2.2.18).

Функция $u(f(x))$ также является субрешением некоторого уравнения вида (2.2.18) на $\mathcal{X}$. Поскольку отображение $f(x)$ принимает все значения в шаре $B(a,r)$ с выколотым центром, то среди компонент связности множества
$$\{x \in \mathcal{X} : u(f(x)) > s\}$$
имеется, как минимум, одна $\mathcal{X}(s)$, обладающая непустым пересечением с $f^{-1}(B(a,r))$. По принципу максимума для субрешений такая компонента не может иметь компактного замыкания.

Устремляя $s \to \infty$, найдем асимптотический тракт $\{\mathcal{X}(s\}$, вдоль которого отображение с ограниченным искажением стремится к пикаровскому исключительному значению $a \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

В каждом асимптотическом тракте найдется кривая Γ, вдоль которой
$$u(f(x)) \to \infty\,.$$

Тем самым, получаем следующее обобщение теоремы Иверсена [180].

Теорема 6.3.2 *Каждое исключительное пикаровское значение отображения с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ есть асимптотическое значение.*

Классическая форма теоремы Иверсена утверждает, что если $f(z)$ есть целая голоморфная функция на плоскости, то существует кривая Γ, простирающаяся в бесконечность, вдоль которой

$$f(z) \to \infty \quad \text{при} \quad z \to \infty \quad \text{вдоль } \Gamma.$$

Мы дадим обобщение этой теоремы для отображений с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых многообразий.

Теорема 6.3.3 *Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением между n-мерными некомпактными римановыми многообразиями без края и $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Если на многообразии $\mathcal{X}$ имеется специальная функция исчерпания, а на многообразии $\mathcal{Y}$ существует функция роста $u = u(y)$, являющаяся положительным субрешением уравнения* (2.2.18) *с $p = n$, то отображение $f(x)$ имеет, как минимум, один асимптотический тракт и, в частности, как минимум, одну расходящуюся кривую Γ на $\mathcal{X}$, вдоль которой $u(f(x)) \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$ – специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{X}$. Положим

$$\liminf_{\tau \to \infty} \min_{h(x) = \tau} u(f(x)) = K. \tag{6.3.8}$$

Если $K = \infty$, то $u(f(x)) \to \infty$ равномерно на $\mathcal{X}$ при $h(x) \to \infty$. Асимптотический тракт $\{\mathcal{X}(s)\}$ формирует вложенные одна в другую компоненты связности множества $\{x \in \mathcal{X} : h(x) > s\}$.

Пусть $K < \infty$. Для произвольного $s > K$ рассмотрим множество

$$\mathcal{O}(s) = \{x \in \mathcal{X} : u(f(x)) > s\}.$$

Поскольку $u(f(x))$ есть субрешение, множество $\mathcal{O}(s)$ не имеет компонент связности с компактным замыканием. Отсюда вытекает возможность выбора при каждом $s > K$ в качестве $\mathcal{X}(s)$ компонент связности множества $\mathcal{O}(s)$, обладающих свойством b) из определения асимптотического тракта. Отсюда легко усмотреть справедливость теоремы в общем случае. $\square$

При некоторых предположениях относительно роста отображения с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, мы дадим оценку размера асимптотического тракта $\mathcal{X}(s)$. С этой целью положим

$$M(\tau) = \max_{h(x) = \tau} u(f(x)).$$

Предположим, что для некоторого $\gamma > 0$ выполнено

$$\liminf_{\tau\to\infty} M(\tau+1)\exp\Big\{-\gamma\int^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t);1)\,dt\Big\} = 0. \tag{6.3.9}$$

Пусть K – величина, определяемая равенством (6.3.8). Случай $K = \infty$ вырожден и не представляет интереса в рассматриваемой задаче.

Пусть $K < \infty$. Зададим произвольно $s > K$ и рассмотрим множество $\mathcal{X}(s)$, определенное в доказательстве предыдущей теоремы. Положим

$$\tau_0 = \tau_0(s) > \inf_{x\in\mathcal{X}(s)} h(x).$$

Поскольку $u(f(x))$ есть субрешение некоторого уравнения вида (2.2.18) на $\mathcal{X}$, как и выше, по теореме 2.3.3 для произвольного $\tau > \tau_0$ имеем

$$\int\limits_{B_h(\tau_0)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \exp\Big\{-\nu_0\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(t)\,dt\Big\}\int\limits_{B_h(\tau)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1}.$$

Пользуясь неравенством (4.1.13) для величины $\varepsilon(t)$, получаем

$$\int\limits_{B_h(\tau_0)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le$$

$$\le \exp\Big\{-\tfrac{\nu_0}{c}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\lambda_n(\Sigma_h(t)\cap\mathcal{X}(s))\,dt\Big\}\int\limits_{B_h(\tau)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1},$$

где

$$c = \sqrt{\nu_1^{-2} - \nu_2^{-2}} + \frac{n-1}{n}\nu_2^{-1}. \tag{6.3.10}$$

В силу (2.3.30), имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^n &\le \int\limits_{B_h(\tau)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \\ &\le n^n \int\limits_{B_h(\tau+1)\setminus B_h(\tau)} |\nabla h|^n \, |u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \\ &\le n^n \, M^n(\tau+1)\, V(\tau).\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Однако $h(x)$ является специальной функцией исчерпания и на основании (1.1.22) при всех, достаточно больших τ, имеем

$$V(\tau) \le \mathrm{const}_1$$

с некоторой постоянной, отличной от ∞. Следовательно,

$$\int\limits_{B_h(\tau)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \mathrm{const}_2 \, M^n(\tau+1)$$

и, далее,

$$\begin{aligned}&\int\limits_{B_h(\tau_0)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \\ &\le \mathrm{const}_3 \, M^n(\tau+1)\, \exp\Big\{-C\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \lambda_n(\Sigma_h(t)\cap\mathcal{X}(s))\, dt\Big\},\end{aligned}$$

где $C = \nu_0/c$ и постоянная c определена соотношением (6.3.10).

В этих обстоятельствах из условия (6.3.9) на рост $M(\tau)$ следует, что при всех $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших τ имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{B_h(\tau_0)\cap\mathcal{X}(s)} |\nabla u(f(x))|^n * \mathbb{1} \le \\ &\le \mathrm{const}_4 \, \varepsilon\, \exp\Big\{\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \big(n\gamma\lambda_n(\Sigma_h(t);1) - C\lambda_n(\Sigma_h(t)\cap\mathcal{X}(s))\big)\, dt\Big\}.\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Если предположить, что для всех $\tau > \tau_0$ выполнено

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \big(n\gamma\lambda_n(\Sigma_h(t);1) - C\lambda_n(\Sigma_h(t)\cap\mathcal{X}(s))\big)\,dt \le 0\,,$$

то произвол в выборе $\varepsilon > 0$ повлечет (6.3.12), что будет означать

$$|\nabla u(f(x))| \equiv 0$$

на $B_h(\tau_0)\cap\mathcal{X}(s)$. Это невозможно.

Следовательно, существует $\tau = \tau(K) > \tau_0(K)$, для которого

$$\lambda_n(\Sigma_h(\tau)\cap\mathcal{X}(s)) < \frac{n\gamma}{C}\lambda_n(\Sigma_h(\tau);1). \tag{6.3.13}$$

Полагая $K \to \infty$, убеждаемся, что $\tau_0 \to \infty$. Пользуясь каждый раз соотношением (6.3.12), приходим к утверждению

Теорема 6.3.4 *Если отображение с ограниченным искажением $f(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ удовлетворяет условию (6.3.12) для некоторого $\gamma > 0$, то при каждом $k = 1, 2, \ldots$ найдется h-сфера $\Sigma_h(t_k)$ и открытое множество $U \subset \Sigma_h(t_k)$, для которых*

$$u(f(x))|_{x\in U} \ge k \quad \textit{и} \quad \lambda_n(U) < \frac{n\gamma}{C}\,\lambda_n(\Sigma_h(t_k);1). \tag{6.3.14}$$

Замечание 6.3.1 *В этой теореме мы использовали лишь часть информации относительно размеров множеств $\mathcal{X}(s)$, содержащейся в (6.3.12). В частности, соотношение (6.3.12) содержит некоторые характеристики линейной меры множества тех $t > \tau_0$, для которых пересечение множеств $\mathcal{X}(s)$ с h-сферами $\Sigma_h(t)$ не слишком узко.*

Пример 6.3.4 Рассмотрим случай искривленного риманова произведения $\mathcal{X} = (r_1, r_2)\times S^{n-1}(1)$ с метрикой $ds^2_{\mathcal{X}}$, как в (6.3.3). Пусть $h = h(|x|)$ – специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{X}$, имеющая вид (1.1.27) с $p = n$ и удовлетворяющая условию (1.1.26).

Здесь,

$$\begin{aligned} \lambda_n(\Sigma_h(\tau);1) &= \frac{\lambda_n(S^{n-1}(1);1)}{\beta(r(\tau))\,h'(r(\tau))}, \\ \lambda_n(U) &= \frac{\lambda_n(U^*)}{\beta(r(\tau))\,h'(r(\tau))}, \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

где $r(\tau) = h^{-1}(\tau)$ и $U^* \subset S^{n-1}(1)$ есть образ множества U при отображении подобия

$$x \mapsto \frac{x}{\beta(r(\tau))}$$

пространства $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Пусть $f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, $|f(x)| > 1$. Выберем в качестве функции роста $u = u(y)$ функцию $u = \ln^+ |y|$. Условие (6.3.9) может быть записано в виде

$$\liminf_{r \to r_2} \max_{|x|=r} \ln^+ |f(x)| \exp\Big\{-\gamma \lambda_n(S^{n-1}(1); 1) \int^r \frac{dt}{\beta(t)}\Big\} = 0. \qquad (6.3.16)$$

Тем самым, мы получаем

Следствие 6.3.4 *Если отображение с ограниченным искажением*

$$f(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$$

обладает свойством (6.3.16) *для некоторого* $\gamma > 0$, *то для всякого* $k = 1, 2, \ldots$ *найдутся сферы* $S^{n-1}(t_k)$, $t_k \in (r_1, r_2)$, $t_k \to r_2$, *и открытые множества* $U \subset S^{n-1}(t_k)$, *вдоль которых*

$$|f(x)| > k \ \text{ при всех } \ x \in U \quad \text{и} \quad \lambda_n(U) < \frac{n\gamma}{C} \lambda_n(S^{n-1}(1); 1).$$

Замечание 6.3.2 *Оценки величин* $\lambda_n(U^*)$ *и* $\lambda_n(S^{n-1}(1); 1)$ *были даны в 4.1.7 в терминах* $(n-1)$*-мерной меры Хаусдорфа и в 4.1.2 — в терминах наилучшей постоянной в теореме вложения С.Л. Соболева пространства* $W^{1,n}$ *в пространство* C *на открытых подмножествах сферы. Последняя константа может быть без особых трудностей оценена через максимальный радиус шара, содержащегося в данном подмножестве. Однако, мы не будем останавливаться на этой задаче, предоставив читателю проделать вычисления независимо.*

В одномерном случае в разделе 4.1.7 были даны точные значения величины $\lambda_2(U)$ *и ее* N*-средних. Из следствия 6.3.4 и этих соотношений несложно получить соответствующий результат К. Аримы [122] для целых голоморфных функций на плоскости.*

6.4 Другие версии альтернативы Фрагмена–Линделефа

Ниже мы приводим некоторые нетрадиционные варианты альтернативы Фрагмена – Линделефа для отображейий с ограниченным искажением многообразий. В случае голоморфных функций $f(z)$ в неограниченных областях плоскости подобные утверждения имеют вид: *если* $\mathrm{Im} f(z) = 0$ *на границе области, то либо* $f(z) \equiv \mathrm{const}$, *либо* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *и* $\mathrm{Re} f(z)$ *растет достаточно быстро при* $z \to \infty$. Ближайший аналог в случае гармонических функций есть принцип Фрагмена – Линделефа для функций с нулевыми граничными данными Неймана.

6.4.1 Граничные условия

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ – неограниченная область в пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_k$, $1 \le k < n$. Пусть $\mathcal{B}$ – $(n-k)$-мерное риманово многообразие с краем или без края. В случае $k = n$ мы предполагаем, что $\mathcal{B} = \emptyset$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{Y} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ и обозначим через

$$\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \eta : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

естественные проекции декартова произведения на сомножители.

Пусть

$$w_{\mathcal{A}} = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$$

– форма объема на $\mathcal{A}$. Определим $(k-1)$-мерные формы

$$z_i(y) = (-1)^{i-1}\, y_i\, dy_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \ldots \wedge dy_k$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим

$$z_{\mathcal{A}}(y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} z_i(y). \qquad (6.4.1)$$

Легко видеть, что

$$dz_{\mathcal{A}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k = w_{\mathcal{A}}.$$

Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное некомпактое риманово многообразие и $\partial\mathcal{X} \neq \emptyset$. Зафиксируем функции исчерпания $h(x) : \mathcal{X} \to (0, \infty)$.

Пусть $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением и пусть
$$f = \pi \circ F = (f_1, f_2, \ldots, f_k) : \mathcal{X} \to \mathcal{A}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество форм Z, $\deg Z = k-1$, на многообразии $\mathcal{X}$ таких, что $Z = f^* z_{\mathcal{A}}$, где $z_{\mathcal{A}}$ есть форма вида (6.4.1), $f = \pi \circ F$ и F есть произвольное отображение с ограниченным искажением $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Пусть $Z \in \mathcal{F}$ – произвольная форма данного класса. В силу (6.4.1), имеем
$$Z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} f_i(x)\, df_i(x) \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i(x)} \wedge \ldots \wedge df_k(x),$$
и, таким образом, $Z \in W^{1,n/(k-1)}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X})$.

Заметим, что
$$\begin{aligned} dZ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\, df_i \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = f^* w_{\mathcal{A}}. \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Согласно теореме 2.2.6 форма dZ принадлежит классу $\mathcal{WT}_3$ со структурными постоянными $p = n/k$ и ν_1,ν_2, описанными в замечании 2.2.3. В соответствии с 2.2.3 форма, дополнительная к форме $dZ = f^* w_{\mathcal{A}}$, есть $g^* w_{\mathcal{B}}$, где $g = \eta \circ F$ и $w_{\mathcal{B}}$ – форма объема на многообразии $\mathcal{B}$.

6.4.2 Неравенство типа Пуанкаре – Соболева

Предположим, что форма Z удовлетворяет граничному условию (2.3.4). Тогда $Z \in \mathcal{F}_N$, где класс $\mathcal{F}_N$ был определен в разделе 2.3.4. Функционал (2.3.21) здесь имеет вид
$$\varepsilon(\tau; \mathcal{F}_N) = \inf \frac{\displaystyle\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |dZ|^{n/k}\, |\nabla h|^{-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}}{\Big| \displaystyle\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta \rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \Big|} \tag{6.4.3}$$

где $\theta = *(g^* w_{\mathcal{B}})$ и точная нижняя грань берется по всевозможным формам $Z \in \mathcal{F}_N$, $\deg Z = k-1$.

Оценим знаменатель в (6.4.3). Рассмотрим множество всех форм

$$Z_0 \in W^{1,n/k}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}), \quad \deg Z_0 = k-1, \quad dZ_0 = 0, \tag{6.4.4}$$

таких, что для почти всех $\tau \in (0,\infty)$ выполнено

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} Z_0 \wedge \theta = 0. \tag{6.4.5}$$

В силу (6.4.4) и (6.4.5), для почти всех $\tau \in (0,\infty)$ имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z - Z_0, *\theta\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (Z - Z_0) \wedge \theta = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}$$

то есть, величина знаменателя в (6.4.3) не изменилась.

Выберем

$$Z_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \lambda_i \, df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k \, ,$$

где λ_i суть произвольные постоянные.

Ясно, что данная форма удовлетворяет (6.4.4). Проверим выполнение требования (6.4.5). Мы имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} Z_0 \wedge \theta = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \lambda_i \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \theta.$$

Однако, в соответствии с граничным условием (2.3.4) имеет место соотношение

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \theta = \int\limits_{B_h(\tau)} d\Big(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k\Big) \wedge \theta = 0$$

и требование (6.4.4) действительно выполняется.

Далее имеем

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Big| = \Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} (Z - Z_0)\wedge\theta\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f_i - \lambda_i|\, |(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \theta)_{\Sigma_h(\tau)}|,$$

где символ $(\omega)_{\Sigma_h(\tau)}$ означает ограничение формы ω на Σ_h.

Поскольку формы $df_i|_{\Sigma_h(\tau)}$ простые, мы имеем

$$|(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \theta)_{\Sigma_h(\tau)}| \le |\theta| \prod_{j=1, j\neq i}^{k} |(df_j)_{\Sigma_h(\tau)}|,$$

и

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Big| \le \tag{6.4.6}$$

$$\le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f_i - \lambda_i|\, |\theta| \prod_{j=1, j\neq i}^{k} |(df_j)_{\Sigma_h(\tau)}|\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}.$$

Пусть $m \in \Sigma_h(\tau)$ – регулярная точка h-сферы. По теореме 1.5.1 монографии [86] для почти всех τ множества уровня $\Sigma_h(\tau)$ суть счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$-спрямляемы. Для каждого такого τ мы вправе заключить по теореме 1.5.2 цитированной монографии, что $\Sigma_h(\tau)$ имеет касательные гиперплоскости $\mathcal{H}^{n-1}$ почти везде.

Как и в разделе 4.1.1, обозначим через $\nabla_1 f_i(m)$, $\nabla_2 f_i(m)$ проекции вектора $\nabla f_i(m)$ на единичный вектор нормали к $\Sigma_h(\tau)$ и на касательную гиперплоскость $T_m(\mathcal{X})$, соответственно. При этом ясно что

$$|(df_i)_{\Sigma_h(\tau)}| = |\nabla_2 f_i|\,.$$

С другой стороны, в силу (4.1.43) для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{n-1} |f_i - \lambda_i|^n\, d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \le \mu_n^{-n}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} |\nabla_2 f_i|^n d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |f_i-\lambda_i|\,|\theta| \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |(df_j)_{\Sigma_h(\tau)}| \le \Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{n-1}|f_i-\lambda_i|^n d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\theta|^{\frac{n}{n-1}} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\le\ \underline{c}^{k-n}\mu_n^{-1}(\Sigma_h(\tau))\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f_i|^n d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}\times$$
$$\times\ \Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{(n-k)n}{k(n-1)}} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{6.4.7}$$

Здесь было использовано неравенство (2.2.25) и постоянная $\underline{c}$ определена в замечании 2.2.2.

На основании "неравенства Юнга с $\varepsilon > 0$" получаем

$$\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|\nabla_2 f_i|^n d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}\times \tag{6.4.8}$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}|f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n(n-k)}{k(n-1)}} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\le \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}\Big(\frac{\varepsilon^n}{n}|\nabla_2 f_i|^n + \frac{n-1}{n}\varepsilon^{\frac{n}{1-n}}|f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{k(n-k)}{k(n-1)}} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}}\Big) d\mathcal{H}_{\mathcal{X}}^{n-1}.$$

Поскольку

$$|f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n(n-k)}{k(n-1)}} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}} \le \frac{n-k}{n-1}|f^*w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n}{k}} + \frac{k-1}{n-1} \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{k-1}}$$

и

$$\prod_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{k-1}} \leq \frac{1}{k-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^n,$$

то

$$\frac{\varepsilon^n}{n} |\nabla_2 f_i|^n + \frac{n-1}{n} \varepsilon^{\frac{n}{1-n}} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n(n-k)}{k(n-1)}} \prod_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^{\frac{n}{n-1}} \leq$$

$$\leq \frac{n-k}{n} \varepsilon^{\frac{n}{1-n}} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n}{k}} + \frac{\varepsilon^n}{n} |\nabla_2 f_i|^n + \frac{1}{n} \varepsilon^{\frac{n}{1-n}} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^n.$$

Объединяя это неравенство с неравенствами (6.4.6)–(6.4.8), находим

$$\Big| \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta \rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} \Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\varepsilon^{\frac{n}{1-n}} \frac{n-k}{n} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n}{k}} + \frac{\varepsilon^n}{kn} \sum_{i=1}^{k} |\nabla_2 f_i|^n \right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\frac{\varepsilon^{\frac{n}{1-n}}}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla_1 f_j|^n \right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\varepsilon^{\frac{n}{1-n}} \frac{n-k}{n} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n}{k}} \right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\frac{\varepsilon^n}{kn} \sum_{i=1}^{k} |\nabla_2 f_i|^n + \frac{k-1}{kn} \varepsilon^{\frac{n}{1-n}} \sum_{i=1}^{k} |\nabla_1 f_i|^n \right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}.$$

Выберем теперь $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы коэффициенты перед суммами в правой части данного соотношения были равны, то есть,

$$\varepsilon_0 = (k-1)^{\frac{n-1}{n^2}}. \qquad (6.4.9)$$

Тогда имеем

$$\left|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\right| \leq \tag{6.4.10}$$

$$\leq \underline{c}^{k-n}\mu_n^{-1}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\varepsilon_0^{\frac{n}{1-n}} \frac{n-k}{k} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{\frac{n}{k}}\right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}} +$$

$$+\underline{c}^{k-n}\mu_n^{-1}(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1} \left(\frac{\varepsilon_0^n}{kn} \sum_{i=1}^{k} (|\nabla_1 f_i|^n + |\nabla_2 f_i|^n)\right) d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\,.$$

Поскольку

$$(a^n + b^n)^{1/n} \leq (a^2 + b^2)^{1/2},$$

то

$$(|\nabla_1 f_i|^n + |\nabla_2 f_i|^n)^{1/n} \leq \left(|\nabla_1 f_i|^2 + |\nabla_2 f_i|^2\right)^{1/2} = |\nabla f_i|,$$

и мы получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \bigl(|\nabla_1 f_i|^n + |\nabla_2 f_i|^n\bigr) \leq \sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^n \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\right)^{n/2} = ||f^* w_{\mathcal{A}}||^n.$$

Однако, форма $f^* w_{\mathcal{A}}$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_3$ и, по теореме 2.2.5,

$$||f^* w_{\mathcal{A}}||^n \leq k^{n/2} \nu_3 \langle f^* w_{\mathcal{A}}, *\theta\rangle \leq k^{n/2} \nu_3 |f^* w_{\mathcal{A}}|\, | * \theta|,$$

где ν_3 – постоянная, определенная в замечании 2.2.2.

Таким образом, в силу (2.2.25), мы можем записать

$$||f^* w_{\mathcal{A}}||^n \leq k^{n/2} \nu_3 \underline{c}^{k-n} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k}.$$

Пользуясь (6.4.10), приходим к полезному неравенству для знаменателя в (6.4.3)

$$\Bigl|\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} \langle Z, *\theta\rangle d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}\Bigr| \leq C\mu_n(\Sigma_h(\tau)) \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{-1}\, |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}},$$

где постоянная

$$C = \underline{c}^{k-n}\Big(\frac{n-k}{k}\varepsilon_0^{\frac{n}{1-n}} + \frac{\varepsilon_0^n}{n}k^{(n-2)/2}\nu_3\underline{c}^{k-n}\Big) \tag{6.4.11}$$

и постоянная ε_0 определена соотношением (6.4.9) тогда, как постоянные ν_3 и $\underline{c}$ определены в замечании 2.2.2.

Подставляя это неравенство в (6.4.3), окончательно получаем

$$\frac{1}{C}\mu_n(\Sigma_h(\tau)) \le \varepsilon(\tau; \mathcal{F}_N). \tag{6.4.12}$$

6.4.3 Рост интеграла энергии

Данное неравенство открывает возможность записать (2.3.23) в виде

$$\int\limits_{B_h(\tau_1)} |dZ|^{n/k} * \mathbb{1} \le \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\}\int\limits_{B_h(\tau_2)} |dZ|^{n/k} * \mathbb{1}, \tag{6.4.13}$$

где $\nu_0 = \nu_1\nu_2^{n/(n-k)}$ и постоянные ν_1,ν_2 определены в замечании 2.2.2.

Далее заметим, что для каждого фиксированного $\tau_3 \in (0,\infty)$ и фиксированных величин $\lambda_i(\tau_3)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих условию (2.3.27), форма

$$Z_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\lambda_i(\tau_3)\, df_i \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k.$$

Чтобы убедиться в этом зададим произвольную липшицеву функцию ϕ на $\overline{B}_h(\tau_3)$. В силу граничного условия (2.3.4), имеем

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau_3)} \phi\, Z_0 \wedge \theta = \int\limits_{B_h(\tau_3)} d(\phi Z_0) \wedge \theta = \int\limits_{B_h(\tau_3)} d\phi \wedge Z_0 \wedge \theta, \tag{6.4.14}$$

как и требуется.

Воспользуемся теоремой 2.3.4, применив ее к форме $f^*w_{\mathcal{A}}$. Для произвольного $\tau_3 > \tau_2$ имеем

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} |f^*w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1} \leq \frac{n\nu_1}{k(\tau_3-\tau_2)} \int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h|\,|(Z-Z_0)\wedge\theta| * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{const}}{\tau_3-\tau_2} \int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h|\,|Z-Z_0|\,|\theta| * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{const}}{\tau_3-\tau_2} \int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h| \sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-\lambda_i(\tau_3)|\,|\theta| \prod_{j=1, j\neq i}^{k} |\nabla f_j| * \mathbb{1}.$$

Аргументируя, как и выше, находим

$$|\theta| \prod_{j=1,j\neq i}^{k} |\nabla f_j| \leq \mathrm{const}\,|f^*w_{\mathcal{A}}|^{(n-k)/k} \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{(k-1)/2} \leq$$

$$\leq \mathrm{const}\,|f^*w_{\mathcal{A}}|^{(n-k)/k} ||f^*w_{\mathcal{A}}||^{k-1} \leq \mathrm{const}\,|f^*w_{\mathcal{A}}|^{(n-1)/k}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} |f^*w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{const}}{\tau_3-\tau_2} \int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h|\,|f^*w_{\mathcal{A}}|^{(n-1)/k} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-\lambda_i(\tau_2)|^2\Big)^{1/2} * \mathbb{1}$$

и по формуле Кронрода – Федерера при любых $\tau_3 > \tau_2 > 0$ выполняется

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} |f^*w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1} \leq \frac{\mathrm{const}}{\tau_3-\tau_2} \int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} \omega(t;\lambda)dt \int\limits_{\Sigma_h(t)} |f^*w_{\mathcal{A}}|^{(n-1)/k} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}, \quad (6.4.15)$$

где

$$\omega(t;\lambda) = \sup_{x\in\Sigma_h(t)} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-\lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2}$$

и
$$\lambda(\tau_3) = \big(\lambda_1(\tau_3), \lambda_2(\tau_3), \dots, \lambda_k(\tau_3)\big)$$
суть произвольные постоянные.

Если воспользоваться теоремой 2.3.5 для оценки интеграла от $|dZ|$ по h-шару $B_h(\tau_2)$, то при произвольных $\tau_3 > \tau_2 > 0$ имеем
$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1} \le \Big(\frac{\nu_2}{\nu_1}\Big)^{n/k} \Big(\frac{n}{k(\tau_3 - \tau_2)}\Big)^{n/k} \int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} |\nabla h|^{n/k} |Z - Z_0|^{n/k} * \mathbb{1}.$$
Как и выше, получаем
$$\begin{aligned} |Z - Z_0| &\le \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|\, |df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_k| \\ &\le \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)| \prod_{j=1, j\ne i}^{k} |\nabla f_j| \\ &\le \mathrm{const} \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{(k-1)/2} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2} \qquad (6.4.16) \\ &\le \mathrm{const}\, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \mathrm{const}\, |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(k-1)/k} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$
Данный путь приводит к оценке
$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1} \le \frac{\mathrm{const}}{(\tau_3 - \tau_2)^{n/k}} \int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} |\nabla h|^{n/k} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(k-1)/k} * \mathbb{1} \le$$
$$\le \frac{\mathrm{const}}{(\tau_3 - \tau_2)^{n/k}} \int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} \omega^{n/k}(t;\lambda)\, dt \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{(n-k)/k} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(k-1)/k} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}. \qquad (6.4.17)$$

6.4.4 Интеграл энергии в специальном случае

Мы завершим найденные оценки интеграла от $|dZ|$ по h-шару еще одной оценкой, формулируемой в терминах $\omega(t;\lambda)$ и использующей специальный вид формы Z.

Зафиксируем $\tau_3 > \tau_2$ и введем в рассмотрение функцию

$$\phi = \begin{cases} 1 \quad \text{при}\ h(x) \le \tau_2\,, \\[2ex] \dfrac{\tau_3 - h(x)}{\tau_3 - \tau_2} \quad \text{при}\ \tau_2 < h(x) < \tau_3\,, \\[2ex] 0 \quad \text{при}\ \tau_3 \le h(x)\,. \end{cases}$$

Для форм $\phi^n\, Z$ и $\phi^n\, Z_0$ выполнены, соответственно, (2.3.4) и (6.4.14). Так как форма $\phi^n(Z - Z_0)$ обращается в нуль на $\Sigma_h(\tau_3)$, то мы имеем

$$\int\limits_{B_h(\tau_3)} d\left(\phi^n(Z - Z_0)\right) \wedge \theta = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n d(Z - Z_0) \wedge \theta = -n \int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^{n-1}\, d\phi \wedge (Z - Z_0) \wedge \theta$$

и, следовательно,

$$\Big| \int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n dZ \wedge \theta \Big| \le n \int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} \phi^{n-1} |d\phi|\, |Z - Z_0|\, |\theta| * \mathbb{1}. \tag{6.4.18}$$

Как при доказательстве теоремы 2.2.5, находим

$$dZ \wedge \theta = \langle f^* w_{\mathcal{A}}, *\theta\rangle * \mathbb{1} \ge \text{const}\, |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k},$$

где const – некоторая постоянная, величина которой здесь не существенна.

Однако,

$$|f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k} \ge \text{const}\, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^n = \text{const} \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2 \Big)^{n/2}$$

и, следовательно,

$$\Big|\int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n \, dZ \wedge \theta\Big| \geq \text{const} \int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1}. \tag{6.4.19}$$

С другой стороны, согласно (6.4.16) имеем

$$|Z - Z_0| \, |\theta| \leq \text{const} \, |\theta| \, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \text{const} \, |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(n-k)/k} \, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \text{const} \, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} \phi^{n-1} \, |d\phi| \, |Z - Z_0| \, |\theta| * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \text{const} \int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} \phi^{n-1} |\nabla \phi| \, ||f^* w_{\mathcal{A}}||^{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2} * \mathbb{1}.$$

В силу (6.4.18) и (6.4.19), это неравенство влечет

$$\int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \text{const} \int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} \phi^{n-1} |\nabla \phi| \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{(n-1)/2} \Big(\sum_{i=1}^{k} |f_i - \lambda_i|^2\Big)^{1/2} * \mathbb{1}$$

$$\leq \text{const} \Big(\int\limits_{\tau_2 < h(x) < \tau_3} \phi^n \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1}\Big)^{(n-1)/n} \times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla\phi|^n\Big(\sum_{i=1}^{k}|f_i-\lambda_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1}\Big)^{1/n}$$

и, далее,

$$\int\limits_{B_h(\tau_3)} \phi^n\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1} \leq$$

$$\leq \mathrm{const} \int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\phi'|^n|\nabla h|^n\Big(\sum_{i=1}^{k}|f_i-\lambda_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1}.$$

Пользуясь теперь специальным видом функции ϕ, приходим к неравенству

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} \Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1} \leq \mathrm{const}\frac{\tilde{\omega}^n(\tau_3;\lambda)}{(\tau_3-\tau_2)^n}\int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h|^n * \mathbb{1}, \quad (6.4.20)$$

где

$$\tilde{\omega}(\tau_3;\lambda) = \sup_{x\in B_h(\tau_3)}\Big(\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)-\lambda_i(\tau_3)|^2\Big)^{1/2}.$$

В частном случае, когда $h(x)$ есть специальная функция исчерпания многообразия $\mathcal{X}$ со структурной постоянной $p=n$, используя соотношения (1.1.20), (1.1.21), получаем

$$\int\limits_{\tau_2<h(x)<\tau_3} |\nabla h|^n * \mathbb{1} = J\,(\tau_3-\tau_2),$$

где

$$J = \int\limits_{\Sigma_h(\tau)} |\nabla h|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}_{\mathcal{X}}$$

есть величина, не зависящая от τ.

Таким образом, неравенство (6.4.20) может быть переписано в виде

$$\int\limits_{B_h(\tau_2)} \Big(\sum_{i=1}^{k} |\nabla f_i|^2\Big)^{n/2} * \mathbb{1} \le \mathrm{const}\, \frac{\tilde{\omega}^n(\tau_3;\lambda)}{(\tau_3-\tau_2)^{n-1}}. \tag{6.4.21}$$

6.4.5 Другие версии альтернативы

Объединяя (6.4.13), (6.4.15), (6.4.17), (6.4.20), (6.4.21), приходим к утверждению

Теорема 6.4.1 *Пусть $\mathcal{X}$ – n-мерное риманово многообразие, $\partial\mathcal{X} \ne \emptyset$. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ – неограниченная область, $\mathcal{B}$ – $(n-k)$-мерное риманово многообразие с краем либо без края, $\mathcal{Y} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, и $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $\eta : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ – естественные проекции многообразия $\mathcal{Y}$ на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, соответственно.*

Пусть $h(x)$ – функция исчерпания на $\mathcal{X}$.

Пусть $F(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение с ограниченным искажением, $f = \pi \circ F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, $g = \eta \circ F$ и $w_{\mathcal{B}}$ – форма объема на $\mathcal{B}$, $Z = g^* w_{\mathcal{B}}$. Предположим, что Z удовлетворяет условию (2.3.4).

Тогда либо $F(x) \equiv \mathrm{const}$, либо $F(x) \not\equiv \mathrm{const}$ и

$$\liminf_{\tau\to\infty} \int\limits_{B_h(\tau)} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{n/k} * \mathbb{1}\ \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int^{\tau} \mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0, \tag{6.4.22}$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} \mathrm{osc}\{f; B_h(\tau+1)\} \int\limits_{\tau<h(x)<\tau+1} |\nabla h|\, |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(n-1)/k} * \mathbb{1} \times \tag{6.4.23}$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int^{\tau+1} \mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0,$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty} (\mathrm{osc}\{f; B_h(\tau+1)\})^{n/k} \int\limits_{\tau<h(x)<\tau+1} |\nabla h|^{n/k} |f^* w_{\mathcal{A}}|^{(k-1)/k} * \mathbb{1} \times \tag{6.4.24}$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int\limits^{\tau+1}\mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0,$$

или

$$\liminf_{\tau\to\infty}(\mathrm{osc}\{f; B_h(\tau+1)\})^n \int\limits_{\tau<h(x)<\tau+1} |\nabla h|^n * \mathbb{1}\times \tag{6.4.25}$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int\limits^{\tau+1}\mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0.$$

В частности, если $h(x)$ есть специальная функция исчерпания $\mathcal{X}$, то либо $F \equiv \mathrm{const}$, либо $F(x) \not\equiv \mathrm{const}$ и

$$\mathrm{osc}^n\{f; B_h(\tau+1)\}\ \exp\Big\{-\frac{\nu_0}{C}\int\limits^{\tau+1}\mu_n(\Sigma_h(t))dt\Big\} > 0. \tag{6.4.26}$$

Здесь $\nu_0 = \nu_1\,\nu_2^{n/(n-k)}$, постоянные ν_1, ν_2 определены в замечании 2.2.2, *а постоянная C — равенством* (6.4.11).

Для **доказательства** достаточно положить $\tau_3 = \tau_2 + 1$, после чего выбрать постоянные $\lambda_i(\tau_3)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, равными $f_i(x_0)$, где $x_0 \in B_h(\tau_2+1)$, и заметить, что

$$\max\{\omega(\tau_3;\lambda),\ \tilde\omega(\tau_3;\lambda)\} \le \mathrm{osc}\{f; B_h(\tau_3)\}.$$

□

Геометрический смысл условия (2.3.4) описывается леммой 2.3.1. Чтобы пояснить содержание доказанной теоремы рассмотрим ее частные случаи.

Предположим сначала, что сомножитель $\mathcal{B}$ в декартовом произведении $\mathcal{Y} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ является евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n-k}$. Пусть

$$y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n\,,$$

– ортонормальная система координат в $\mathbb{R}^{n-k}$. Тогда

$$w_{\mathcal{B}} = dy_{k+1}\wedge\ldots\wedge dy_n$$

и

$$\theta = df_{k+1}\wedge\ldots\wedge df_n.$$

Условие (2.3.4) может быть записано в виде

$$\int\limits_{\Sigma_h(\tau)} v \wedge df_{k+1} \wedge \ldots \wedge df_n = 0 \tag{6.4.27}$$

для почти всех $\tau \in (0, \infty)$ и всех форм v, $\deg v = k-1$, класса, описанного в (2.3.4).

Здесь имеем

Следствие 6.4.1 *Пусть* $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с ограниченным искажением,* $F(x) \not\equiv \mathrm{const}$, *и пусть* F *удовлетворяет на границе* $\partial\mathcal{X}$ *предположению* (6.4.27). *Положим* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$, $1 \le k < n$. *Тогда*

если

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

то

$$\liminf_{t\to\infty} \operatorname{osc}\{f; B_n(0,t) \cap \mathcal{X}\}\, t^{-(\mu_n\nu_0)/nC} > 0 \tag{6.4.28}$$

где $\mu_n = \mu_n(S_n(1) \cap \mathcal{X})$ *есть основная частота свободной мембраны полусферы единичного радиуса,*

если

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D\},$$

где D *– область в* $\mathbb{R}^{n-1}$ *и*

$$\Sigma_t = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X} : x_n = t\},$$

то

$$\liminf_{t\to\infty} \operatorname{osc}\{f; \Sigma_t\} \exp\Big\{-\frac{\mu_n(D)\nu_0}{nC} t\Big\} > 0. \tag{6.4.29}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ – полупространство. Область $\mathcal{X}$ является n-допустимой в смысле, описанным в примере 1.1.10. Функция $h(x) = \ln|x|$ есть специальная функция исчерпания $\mathcal{X}$. Для доказательства соотношения (6.4.28) достаточно заметить, что

$$\mu_n(\Sigma_h(t)) = \frac{1}{t}\mu_n(S_n(0,1) \cap \mathcal{X}).$$

Если $\mathcal{X}$ – полуцилиндр с осью, параллельной x_n-оси, то он является 1-допустимым и специальная функция исчерпания на $\mathcal{X}$ имеет вид $h(x) = x_n$. Для основной частоты свободной мембраны мы имеем

$$\mu_n(\Sigma_h(t)) \equiv \mu_n(D)\,.$$

$\square$

Глава 7

Почти-решения

Вводятся почти решения квазилинейных уравнений с частными производными эллиптического типа. Рассматриваемый класс уравнений включает в себя, в частности, уравнения для p-гармонических функций, уравнение газовой динамики и др. Указаны условия, при которых решения с особенностями являются почти-решениями. Даются приложения к проблеме устранимых особенностей решений эллиптических уравнений и отображений с ограниченным искажением. Доказательства базируются на взаимосвязях с дифференциальными формами [81], [82].

7.1 Почти-решения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{D'} k(x) \le \operatorname{ess}\sup_{D'} k(x) < \infty \,. \tag{7.1.1}$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\mu_1\, k(x)\, |\xi|^p \le \langle \xi, A(x,\xi) \rangle \,, \tag{7.1.2}$$

$$|A(x,\xi)| \le \mu_2\, k(x)\, |\xi|^{p-1} \,, \tag{7.1.3}$$

где $\mu_1,\ \mu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2/\mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \geq 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0\,. \tag{7.1.4}$$

Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является в D *обобщенным решением уравнения* (7.1.4), если для всякой непрерывной функции $\varphi(x) \in W^{1,q}(D)$, $1/p+1/q = 1$ (при $p = 1$ величина $q = \infty$), с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle\, dx = 0\,, \tag{7.1.5}$$

где $dx = dx_1 \dots dx_n$ – элемент объема.

Предположения (i) и (ii) гарантируют измеримость отображения $x \in D \to A(x, g(x))$ для произвольного измеримого на D векторного поля g. Предположения (7.1.2), (7.1.3) говорят об эллиптичности (7.1.4) (детали см. в [170], раздел **3**). Обобщенные решения всевозможных уравнений описанного вида будем называть A-решениями. Множество A-решений содержит, в частности, класс p-гармонических функций и при $p = 2$ — гармонических.

Отметим, что при определении A-решений в [170] предполагается, что $p > 1$. Допущение $p = 1$ позволяет нам включить в рассмотрения уравнение минимальной поверхности (4.3.9), уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского (4.3.39), а также уравнение газовой динамики (см. ниже раздел 7.3.1).

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является *почти-решением* уравнения (7.1.4), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D)\,, \quad 0 \leq |\varphi(x)| \leq 1\,, \tag{7.1.6}$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\left|\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle\, dx\right| < \varepsilon\,. \tag{7.1.7}$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти-решения h.

В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями, но с почти-решениями. Ниже устанавливается, что при определенных условиях всякое A-решение с особенностями является почти-решением. Даются оценки его уклонения.

Замечание. *Представляется естественным, на первый взгляд, вместо условия (7.1.6) на класс допустимых функций в определении почти-решения потребовать выполнение предположения*

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D)\,, \quad 0 \le |\varphi(x)| \le 1\,. \tag{7.1.8}$$

Ясно, что требование (7.1.8) на функции φ в (7.1.7) является более мягким по сравнению с (7.1.6) и класс почти-решений расширяется. Вместе с тем, несложно усмотреть, что выполнение (7.1.6), (7.1.7) с уклонением $\varepsilon > 0$ влечет выполнение (7.1.8), (7.1.7) с уклонением $\varepsilon_1 = 2\,\varepsilon$. Мы оставляем проверку этого высказывания заинтересованному читателю.

7.1.1 (k,p)-Емкость

В дополнение к p-емкости, используемой выше, нам потребуется *взвешенная* $(k,\, p)$*-емкость*. Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $A, B \subset D$ – подмножества $\mathbb{R}^n$ такие, что их замыкания $\overline{A}$ и $\overline{B}$ компактны относительно D, причем $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Каждая такая тройка множеств $(A, B; D)$ образует конденсатор в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что функция k обладает свойствами (7.1.1). Зафиксируем $p \ge 1$. (k,p)-Емкость конденсатора $(A, B; D)$ определяется как величина

$$\mathrm{cap}_{k,p}(A, B; D) = \inf \int\limits_D k(x)\, |\nabla \varphi|^p dx, \tag{7.1.9}$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям φ класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ со свойствами: $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_B = 1$.

Легко видеть, что для любой пары конденсаторов

$$(A, B; D) \quad \text{и} \quad (A_1, B_1; D)\,,$$

удовлетворяющей условиям $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, выполнено

$$\mathrm{cap}_{k,p}(A_1, B_1; D) \le \mathrm{cap}_{k,p}(A, B; D).$$

Стандартная аппроксимационная техника показывает, что величина $\mathrm{cap}_{k,p}(A, B; D)$ не изменится, если при определении емкости (7.1.9) ограничиться рассмотрением липшицевых функций φ, равных 0 и 1 на множествах A и B соответственно, и $\nabla\varphi \neq 0$ почти всюду на $D \setminus (A \cup B)$.

Компактное множество $E \subset D$ имеет (k, p)-емкость нуль, если

$$\mathrm{cap}_{k,p}(E, U; D) = 0$$

для всякого открытого множества $U \subset D$ такого, что $E \cap U = \emptyset$.

Если $k \equiv 1$, то для всякого конденсатора $(A, B; D)$ в $\mathbb{R}^n$ используем ранее введенное обозначение

$$\mathrm{cap}_p(A, B; D) = \mathrm{cap}_{1,p}(A, B; D)\,.$$

См. также разделы 1.1.3, 1.1.5, 3.2.3. Для $p > 1$ теория $(k,\ p)$-емкости подробно описана в монографии [170, стр. 27-54].

7.1.2 Примеры применения

Один из ключевых вопросов, возникающих при анализе перспективности приложений теории "почти-решений" в практических разработках — это вопрос об объеме информации, содержащихся в неравенствах вида (7.1.7) по сравнению с соотношениями (7.1.5). Мы проиллюстрируем содержательность неравенств (7.1.7) на примере стандартного принципа максимума – минимума.

Итак, пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, пусть $h \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D) \cap C^0(\overline{D})$ – почти-решение уравнения (7.1.4), удовлетворяющего предположениям (7.1.2), (7.1.3) в D. Пусть $\varepsilon > 0$ — его уклонение.

Пусть $h|_{\partial D} < 0$. Предположим, что множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$$

не пусто. В силу условия $h|_{\partial D} < 0$, имеем

$$\overline{\mathcal{O}} \cap \partial D = \emptyset\,.$$

Положим

$$M = \sup_{x \in \overline{D}} h(x)\,.$$

Зафиксируем произвольно функцию $\psi \in W^{1,p}(D)$ со свойствами:

$$0 \le \psi(x) \le 1\,, \quad \mathrm{supp}\,\psi\ -\ \text{компакт}\,. \tag{7.1.10}$$

Функция

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{M} & \text{при} \quad x \in \overline{\mathcal{O}}\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}} \end{cases}$$

имеет носитель $\overline{\mathcal{O}}$, принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ и удовлетворяет условию

$$0 \le \widetilde{h}(x) \le 1\,.$$

Указанными свойствами обладает функция $\varphi = \psi^p \widetilde{h}$ причем ее носитель компактен и содержится в D. Тем самым, на основании (7.1.7), мы можем записать

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla h)\rangle dx \right| < \varepsilon\,.$$

Так как

$$\nabla\varphi = p\psi^{p-1}\widetilde{h}\nabla\psi + \frac{\psi^p}{M}\nabla h \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{O}\,,$$

и

$$\nabla\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x \in D \setminus \overline{\mathcal{O}}\,,$$

отсюда находим

$$\frac{1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p \, \langle \nabla h, A(x, \nabla h)\rangle \, dx \le p \int\limits_{\mathcal{O}} \psi^{p-1}\, |\widetilde{h}| \, |\langle \nabla\psi, A(x, \nabla h)\rangle| \, dx + \varepsilon\,.$$

Пользуясь предположениями (7.1.2), (7.1.3), получаем

$$\frac{\mu_1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p \, k(x) \, |\nabla h(x)|^p \, dx \le p\mu_2 \int\limits_{\mathcal{O}} \psi^{p-1}\, k(x)|\nabla\psi(x)| \, |\nabla h(x)|^{p-1} \, dx + \varepsilon\,.$$

Пусть $p > 1$. В силу неравенства

$$ab \le \frac{1}{p}\left(\frac{a}{\delta}\right)^p + \frac{p-1}{p}(\delta b)^{p/(p-1)}, \quad a, b > 0\,,$$

где $\delta > 0$ – произвольная постоянная, данное соотношение переписываем в виде

$$\frac{\mu_1}{M}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, k(x)\, |\nabla h(x)|^p\, dx \ \leq \delta^{p/(p-1)}(p-1)\mu_2 \int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, k(x)|\nabla h(x)|^p\, dx +$$

$$+\delta^{-p}\mu_2 \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla \psi(x)|^p\, dx + \varepsilon$$

или,

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, k(x)\, |\nabla h(x)|^p\, dx \ \leq \delta^{p/(p-1)}(p-1)\mu\, M \int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p\, k(x)|\nabla h(x)|^p\, dx +$$

$$+\delta^{-p}\mu\, M \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla \psi(x)|^p\, dx + \frac{M}{\mu_1}\varepsilon$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $(p-1)M\,\mu\,\delta^{p/(p-1)} = 1/2$. Тогда выполнено

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{O}} \psi^p k(x)\, |\nabla h(x)|^p\, dx \leq \frac{M}{\mu_1}\,\varepsilon + \tag{7.1.11}$$

$$+2^{p-1}\mu^p M^p (p-1)^{p-1} \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla \psi(x)|^p\, dx\,.$$

Пусть $0 < r < R < \infty$. В частности, выбирая в (7.1.11) функцию $\psi \equiv 1$ на $\{|x| < r\} \cap \mathcal{O}$ и $\psi \equiv 0$ при $\{|x| > R\} \cap \mathcal{O}$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)|\nabla h|^p\, dx \leq 2\varepsilon\frac{M}{\mu_1} +$$

$$+2^p \mu^p M^p (p-1)^{p-1} \int\limits_{\mathcal{O}\cap\{r<|x|<R\}} k(x)\, |\nabla \psi(x)|^p\, dx\,.$$

Если обозначить через

$$\mathrm{cap}_{k,p}\,(A,L) = \inf_u \int\limits_D k(x)\,|\nabla u|^p\,dx, \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_L \equiv 1\,,$$

взвешенную (k,p)-емкость конденсатора $(A,L;D)$ и через

$$\lambda_{k,p}(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla u|^p dx}{\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,u^p dx}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{7.1.12}$$

основную частоту порядка $p \geq 1$ открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, то в описанных предположениях имеем

$$\lambda_{k,p}(\mathcal{O}) \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,h^p(x)\,dx \leq \int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx\,,$$

и, в силу (7.1.11), мы получаем

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla h(x)|^p\,dx \leq \frac{M}{\mu_1}\,\varepsilon + \tag{7.1.13}$$

$$+2^{p-1}\mu^p M^p (p-1)^{p-1}\,\mathrm{cap}_{k,p}\,(\mathcal{O}_r, \mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_R)\,,$$

где $Q_t = \{|x| < t\} \cap Q$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является (k,p)-*узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{cap}_{k,p}\,(D_r, D\setminus D_R) = 0\,.$$

Тем самым, приходим к следующей форме принципа максимума для почти-решений.

Теорема 7.1.1 *Пусть h – почти-решение с уклонением $\varepsilon > 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения* (7.1.4) *с ограничениями* (7.1.2), (7.1.3), *удовлетворяющее на границе области предположению $h|_{\partial D} \leq 0$. Тогда либо $h \leq 0$ всюду в D, либо либо открытое множество*

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и имеет место (7.1.13).

В частности, если D ограничена или является (k, p)-узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\, h^p(x)\, dx \le \frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{k,p}(\mathcal{O})}\,. \tag{7.1.14}$$

В случае, когда h есть обобщенное A-решение, т.е. уклонение $\varepsilon = 0$, мы имеем

$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, h^p(x)\, dx = 0\,.$$

Отсюда, $h(x) \equiv 0$ и мы приходим к стандартной форме принципа максимума для A-гармонических функций. Другими словами, свойство (7.1.14) для почти-решений представляет собой специальную форму обобщенного принципа максимума для A-гармонических функций.

Соотношение (7.1.14) дает оценку размеров открытого множества $\mathcal{O} = \{x \in D : h(x) > 0\}$ и характеризует насколько почти решение h уравнения A-гармонических в области D функций со свойствами:

$$h|_{\partial D} \le 0\,, \quad \max_{x\in D} h(x) = M\,,$$

отличается от 0 на нем.

Величина $\lambda_{k,p}(\mathcal{O})$ невозрастает с расширением множества $\mathcal{O}$ и потому

$$\lambda_{k,p}(D) \le \lambda_{k,p}(\mathcal{O})\,.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $u : D \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset D$ называется *s-зоной* (*зоной стагнации)* функции u, если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s.

К примеру, можно положить

$$\sup_{x\in\Delta} |u(x) - C| \le s$$

(см. [83], [213]), или

$$\|u(x) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int\limits_{\Delta} |u(x) - C|^p\, dx\right)^{1/p} \le s\,.$$

Соотношения (7.1.13), (7.1.14) служат также источниками оценок размеров областей стагнации почти-решений h. Именно, имеет место

Следствие 7.1.1 *В условиях теоремы* 7.1.1 *выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, h^p(x)\, dx \le \frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{k,p}(D)}\,. \tag{7.1.15}$$

В частности, если величина $\varepsilon > 0$ *столь мала, что*

$$\frac{2\varepsilon M}{\mu_1\, \lambda_{k,p}(D)} \le s\,,$$

то

$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\, h^p(x)\, dx \le s$$

и множество $\mathcal{O}$ *является* s*-зоной.*

7.2 Почти замкнутые формы

Обозначим через $Q(x,t)$ куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и длиной ребра t. Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – *калибровочная* функция, т.е. непрерывная неубывающая функция, обладающая свойством: для всякого $k \geq 1$ найдется постоянная $c(k,\omega)$ такая, что при всех $t \geq 0$ выполнено

$$\omega\,(kt) \leq c(k,\omega)\,\omega(t)\,. \tag{7.2.1}$$

Символом $C^\omega(D)$ мы обозначаем множество всевозможных функций $\varphi : D \to \mathbb{R}$ таких, что для всякого компактного множества $A \subset D$ и произвольного куба $Q(x,r)$ со свойствами

$$Q(x,r) \subset D\,, \quad x \in A\,, \tag{7.2.2}$$

выполнено

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq c(r,A)\,\omega(|x''-x'|) \quad \text{при всех} \quad x', x'' \in Q(x,r)\,.$$

Здесь $c(r,A) > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть α, β – дифференциальные формы степени $k \geq 1$ в D с коэффициентами $\alpha_{i_1\ldots i_k} \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$. Будем говорить, что α и β *интегрально зависимы* в D, если

$$\int\limits_D \alpha \wedge *\beta = 0. \tag{7.2.3}$$

Дифференциальная форма α является слабо замкнутой в D (в смысле определения 2.1.1), если α интегрально зависима в D от всякой дифференциальной формы $d\beta$, $\deg\beta = \deg\alpha - 1$, с компактным носителем $\operatorname{supp}\beta = \overline{\{x \in D : \beta \neq 0\}}$ в D и коэффициентами класса $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(D)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Будем говорить, что форма

$$\alpha \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)\,, \quad \deg\alpha = n-1\,,$$

почти замкнута в D с уклонением $\varepsilon > 0$, если

$$\left|\int\limits_D d\varphi \wedge \alpha\right| < \varepsilon \tag{7.2.4}$$

для всех
$$\varphi \in C^1(D)\,, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset D\,, \quad 0 \le |\varphi| \le 1\,.$$

Легко видеть, что если форма α почти замкнута со сколь угодно малым уклонением, то α слабо замкнута.

7.2.1 Лемма о разбиении единицы

Пусть $k \ge 0$ и $p_1, \dots, p_n$ – целые. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство всевозможных замкнутых кубов
$$Q = [p_1 2^{-k}, (p_1+1)2^{-k}] \times \ldots \times [p_n 2^{-k}, (p_n+1)2^{-k}]\,.$$
Каждый из кубов Q имеет стороны длины 2^{-k}, параллельные осям координат $\mathbb{R}^n$, и вершины вида $2^{-k}(p_1, \dots, p_n)$. Такие кубы являются бинарными (двоичными). Два бинарных куба считаются *разъединенными*, если их пересечение не содержит внутренних точек.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и h – произвольная калибровочная функция. Для произвольного $\varepsilon > 0$ полагаем
$$\mathcal{D}^h_\varepsilon(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} h(s_i)\,,$$
где точная нижняя грань берется по всем покрытиям E счетными семействами бинарных кубов $\{Q_i\}$ с ребрами длины $s_i \le \varepsilon$. Положим
$$\mathcal{D}^h(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{D}^h_\varepsilon(E)\,.$$
Заметим, что семейство $\{Q_i\}$ может быть выбрано состоящим из попарно разъединенных кубов, поскольку непустота внутренности пересечения двух бинарных кубов влечет, что один из них содержит другой. Величину $\mathcal{D}^h(E)$ будем называть *бинарной h-мерой* множества E.

Ясно, что бинарная h-мера $\mathcal{D}^h(E)$ сравнима с мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^h(E)$. Именно, существуют постоянные $C_1 = C_1(n,h)$, $C_2 = C_2(n,h)$, $0 < C_1 \le C_2 < \infty$, такие что для всякого компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполнено
$$C_1\, \mathcal{H}^h(E) \le \mathcal{D}^h(E) \le C_2\, \mathcal{H}^h(E)\,.$$
В частности, $\mathcal{D}^h(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^h(E) = 0\,.$

Для произвольного куба Q со стороной s пусть λQ $(\lambda > 0)$ означает куб стороны λs и тем же самым центром.

Следующее утверждение представляет собой специальную модификацию леммы 3.1 из работы Харви и Полкинга [165].

Лемма 7.2.1 *Пусть* $\{Q_i\}$ $(1 \leq i \leq N)$ *– конечное семейство попарно разъединенных бинарных кубов с ребрами длины* s_i, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_N$, *и пусть* $\lambda > 1$ *– некоторое, произвольным образом фиксированное число. Для всякого* i *найдется функция* $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, *с носителем* $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \lambda Q_i$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in \cup_{i=1}^N Q_i \,. \tag{7.2.5}$$

При этом, для любых $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n$ *и произвольной постоянной* $c(n, \lambda)$, *удовлетворяющей условию*

$$c(n, \lambda) > 2^{n+2} \frac{\lambda}{\lambda - 1} \,, \tag{7.2.6}$$

выполнено

$$|D_k \varphi_i(x)| \leq \frac{c(n, \lambda)}{s_i} \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.2.7}$$

Здесь обозначено $D_k = \partial/\partial x_k$.

Доказательство. Существование разбиения единицы, подчиненного семейству $\{Q_i\}$, с оценкой вида (7.2.7) для $\lambda = 3/2$ следует из [165]. Для наших целей важен конкретный вид постоянной $c(n, \lambda)$ в неравенстве (7.2.7), поэтому мы приводим здесь самостоятельные построения.

Выберем $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv 1 \quad \text{при} \quad |x_i| \leq 1$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ и

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{при} \quad |x_i| \geq \lambda \,,$$

хотя бы для некоторого i.

Пусть

$$\psi_k(x) = \psi(2(x - a_k)/s_k) \,,$$

где a_k есть центр куба Q_k. Пусть $\varphi_1 = \psi_1$ и пусть

$$\varphi_l = \psi_l \, \Pi_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j) \quad \text{для всякого} \quad l = 2, \ldots, N\,.$$

Тогда $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и при любом $1 \le k \le N$ выполнено

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset \operatorname{supp} \psi_k \subset \lambda Q_k\,.$$

По построению функций φ_k ясно, что $0 \le \varphi_k \le 1$ при всех $1 \le k \le N$. Пользуясь индукцией, выводим

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1 - \Pi_{j=1}^{k}(1-\psi_j) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)\,.$$

Поскольку $\psi_j|_{Q_j} = 1$, то $\Pi_{j=1}^{k}(1-\psi_j) = 0$ при $x \in \cup_{j=1}^{N} Q_j$ и, тем самым,

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \cup_{j=1}^{N} Q_j\,.$$

Нам осталось найти оценку на производные функций φ_i. Уточним сначала выбор функции ψ. Введем в рассмотрение C^∞-функцию

$$\xi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

со свойствами:

$$|\xi(t)| \le 1 \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad \xi(t) \equiv 1 \quad \text{при} \quad t \in [-1, 1],$$

и

$$\xi(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda]\,.$$

Выберем

$$\psi(x) \equiv \psi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \xi(x_k)\,.$$

Тогда, полагая, что $a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ есть центр куба Q_j, имеем

$$\psi_j(x) = \prod_{k=1}^{n} \xi\left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j}\right)\,.$$

Отсюда находим, что при любом $p = 1, \dots, n$ выполнено

$$\begin{aligned} |D_p \psi_j(x)| \ &= \frac{2}{s_j} \left| \prod_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{n} \xi\left(\frac{2(x_k - a_{jk})}{s_j}\right) \right| \left| \xi'\left(\frac{2(x_p - a_{jp})}{s_j}\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{s_j} \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\xi'(t)| \, . \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Функция ξ может быть выбрана так, чтобы для произвольной, наперед заданной постоянной $\mu > 1$ было выполнено

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\xi'(t)| \leq \frac{2\mu}{\lambda - 1} \, . \tag{7.2.9}$$

Так как по построению $\varphi_1 = \psi_1$, то, в силу (7.2.8) и (7.2.9), можем записать

$$|D_p \varphi_1(x)| \leq \frac{4\mu}{s_1(\lambda - 1)} \, , \quad p = 1, 2, \dots, n \, . \tag{7.2.10}$$

При $l = 2, 3, \dots$ и $p = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} |D_p \varphi_l| &= \left| D_p \left(\psi_l \ \textstyle\prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) \right| = \\ &= \left| \psi_l \, D_p \left(\textstyle\prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right) + \textstyle\prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) D_p \psi_l \right| = \\ &= \left| \psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1} (D_p \psi_q) \prod_{\substack{j=1\\j\neq q}}^{l-1} (1 - \psi_j) - (D_p \psi_l) \prod_{j=1}^{l-1} (1 - \psi_j) \right| \, . \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Нам потребуется следующее простое геометрическое утверждение.

Лемма 7.2.2 *В условиях леммы* 7.2.1 *для любого* $1 \leq q \leq N$ *никакая точка* $x \in \mathbb{R}^n$ *не может принадлежать одновременно более чем* $\lambda\, 2^n$ *попарно разъединенным кубам* $\{\lambda Q_i\}_{i=1}^q$ *со сторонами* $s_i \geq s_q$.

Для **доказательства** достаточно заметить, что точка x может служить одновременно вершиной не более чем 2^n бинарных кубов системы $\{Q_i\}_{i=1}^q$. □

Функции

$$(D_p\psi_q)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j)\ \ (q=1,2,\dots,l-1) \quad \text{и} \quad (D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)$$

имеют носители, лежащие в λQ_q и λQ_l, соответственно. Обозначим через $\chi_k(x)$ $(1\le k\le l)$ характеристическую функцию куба λQ_k. В силу (7.2.11), мы имеем

$$D_p\varphi_l = -\Big(\psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1}(D_p\psi_q)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - (D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\Big) =$$

$$= -\Big(\psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1}\chi_q(x)\,(D_p\psi_q)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - \chi_l(x)\,(D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\Big)$$

и, далее, пользуясь оценками (7.2.8), (7.2.9), находим

$$\begin{aligned} |D_p\varphi_l| &= \Big|\psi_l \textstyle\sum_{q=1}^{l-1}\chi_q(x)\,(D_p\psi_q)\times \\ &\quad \times \textstyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{l-1}(1-\psi_j) - \chi_l(x)\,(D_p\psi_l)\prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j)\Big| \le \\ &\quad \le \textstyle\sum_{q=1}^{l}\chi_q(x)\,|D_p\psi_q| \le \dfrac{4\mu}{\lambda-1}\displaystyle\sum_{q=1}^{l}\chi_q(x)\frac{1}{s_q}\,. \end{aligned}$$

На основании леммы 7.2.2 в каждой фиксированной точке $y\in\mathbb{R}^n$ получаем

$$|D_p\varphi_l(y)| \le \frac{2^{n+2}\lambda\mu}{\lambda-1}\max\left\{\frac{1}{s_1},\dots,\frac{1}{s_l}\right\} \quad (l=2,3,\dots)\,. \tag{7.2.12}$$

Объединяя (7.2.10), (7.2.12) и учитывая, что постоянная $\mu>1$ произвольна, убеждаемся в справедливости оценки (7.2.7) с постоянной $c(n,\lambda)$, подчиненной ограничению (7.2.6). □

7.2.2 Особенности дифференциальных форм

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Рассмотрим дифференциальную форму θ, $\deg\theta = n-1$, с коэффициентами класса $L^p_{\rm loc}(D\setminus E)$, $p \geq 1$. Для произвольного куба $Q(a,r) \subset D$ такого, что $Q(a,r) \cap E \neq \emptyset$, полагаем

$$\kappa(Q(a,r),\theta) = \inf \int\limits_{Q(a,r)\setminus E} |\theta - \theta_0|\, dx\,,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным слабо замкнутым формам $\theta_0 \in L^p(Q(a,r)\setminus E)$, $\operatorname{supp}\theta_0 \subset \overline{Q(a,r)}\setminus E$.

Наш результат о почти замкнутых формах состоит в следующем.

Теорема 7.2.1 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, пусть ω – калибровочная функция, обладающая свойством* (7.2.1). *Пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество.*

Предположим, что θ, $\deg\theta = n-1$, – дифференциальная форма в $D\setminus E$, почти замкнутая в $D\setminus E$ с уклонением ε_1 и такая, что для всякого бинарного куба $Q(x,r) \subset D$ выполнено

$$\kappa(Q(a,r),\theta) \leq \omega(r)\,. \tag{7.2.13}$$

Тогда форма θ почти замкнута в D с уклонением

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + c(n,\lambda)\, c(\lambda,\omega)\, \varepsilon_2\,, \tag{7.2.14}$$

где

$$\varepsilon_2 = \mathcal{D}^h\,(E) \quad \textit{и} \quad h(t) = \omega(t)\, t^{-1}\,.$$

Приведем другую, более традиционную разновидность теоремы о стирании особенностей дифференциальной формы.

Пусть

$$w \in L^p_{\rm loc}(U),\ \deg w = k,\ 0 \leq k \leq n,\ 1 \leq p \leq \infty\,, \tag{7.2.15}$$

и

$$\theta \in L^q_{\rm loc}(U),\ \deg\theta = n-k,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{7.2.16}$$

– слабо замкнутые диффуренциальные формы, заданные на некотором открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $k(x)$ – произвольная функция, обладающая свойствами (7.1.1). Будем говорить, что пара форм (7.2.15) и (7.2.16) удовлетворяет $(\mathcal{WT}, k)$ условиям на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, если существуют постоянные $\mu_1, \mu_2 > 0$ такие, что почти всюду на U выполнено

$$\mu_1\, k(x)\, |w|^p \leq \ \langle w, *\theta \rangle \tag{7.2.17}$$

и

$$|\theta| \leq \mu_2\, k(x)\, |w|^{p-1}. \tag{7.2.18}$$

Теорема 7.2.2 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество $(p,k)-$емкости нуль, $1 \leq p \leq n$. Пусть Z и θ – формы в $D \backslash E$ степеней $l-1$, $n-l$ соответственно. Предположим, что пара $w = dZ \in L^p_{\rm loc}(D \setminus E)$ и $\theta \in L^q_{\rm loc}(D \setminus E)$, $1/p + 1/q = 1$, удовлетворяет $(\mathcal{WT}, k)$-условиям на $D \setminus E$.*

Если

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in D \backslash E} |Z(x)| < \infty\,, \tag{7.2.19}$$

то существуют формы $\tilde{Z}$, $\tilde{\theta}$ такие, что пара $\tilde{w} = d\tilde{Z} \in L^p_{\rm loc}(D)$, $\tilde{\theta} \in L^q_{\rm loc}(D)$ удовлетворяет $(\mathcal{WT}, k)$-условиям в D и их сужения на $D \setminus E$ совпадают с Z, θ соответственно.

7.2.3 Доказательство теоремы 7.2.1

Пусть $\varphi \in C^\infty(D)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset D$. Нам необходимо доказать, что

$$\left| \int\limits_D d\varphi \wedge \theta \right| < \varepsilon_3\,. \tag{7.2.20}$$

Зафиксируем постоянные $\lambda > 1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, функцию ω со свойством (7.2.1) и функцию $\varphi \in C^\infty(D)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset D$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

Пусть $\delta' = \max_D |\nabla \varphi|$. Так как $\mathcal{D}^h\,(E) = \varepsilon_2$ для $h(t) = \omega(t)\, t^{-1}$ и множество $E \cap \operatorname{supp} \varphi$ компактно, то по определению бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$ множество $E \subset D$ может быть покрыто конечной системой бинарных кубов

$$\{Q(x_l, r_l)\}\,, \quad r_l \leq \delta < \delta'\,, \quad 1 \leq l \leq m\,,$$

так, что

$$\operatorname{int} Q(x_p, r_p) \cap \operatorname{int} Q(x_q, r_q) = \emptyset \quad \text{при всех} \quad p \neq q \tag{7.2.21}$$

и

$$\sum_{l=1}^{m} \omega(r_l)\, r_l^{-1} < \varepsilon_2 + \varepsilon'\,, \tag{7.2.22}$$

где $\delta > 0$ и $\varepsilon' > 0$ – произвольные числа.

По лемме 7.2.1 найдется семейство функций $\varphi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со свойствами (7.2.5) – (7.2.7).

Положим

$$I[\varphi] \equiv \int\limits_{D\setminus E} d\varphi \wedge \theta\,.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} I[\varphi] \ &= \int\limits_D \sum_{l=1}^m d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta + \\ &+ \int\limits_D d(\varphi\,(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l)) \wedge \theta = \\ &= \int\limits_D \sum_{l=1}^m d(\varphi\,\varphi_l) \wedge (\theta - \theta_0) + \\ &+ \int\limits_D d(\varphi\,(1 - \sum_{l=1}^m \varphi_l)) \wedge \theta\,. \end{aligned}$$

Здесь θ_0 есть слабо замкнутая в $Q(x_l, r_l) \setminus E$ форма, описанного выше вида, и мы использовали тот факт, что форма $d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta_0$ финитна в $Q(x_l, r_l) \setminus E$ и потому

$$\int\limits_{Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta_0 * \mathbb{1} = \int\limits_{Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l \wedge \theta_0) * \mathbb{1} = 0\,.$$

Однако,

$$\operatorname{supp}\varphi\,\left(1-\sum_{l=1}^{m}\varphi_l\right)\subset\ D\setminus E\,,\quad 0\le\varphi\,\left(1-\sum_{l=1}^{m}\varphi_l\right)\le 1\,.$$

Форма θ почти замкнута с уклонением $\varepsilon_1>0$ в $D\setminus E$. Таким образом,

$$\left|\int\limits_{D} d(\varphi\,(1-\sum_{l=1}^{m}\varphi_l))\wedge\theta\right|<\varepsilon_1\,,$$

и мы получаем

$$|\,I[\varphi]\,|<\sum_{l=1}^{m}\left|\int\limits_{D} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right|+\varepsilon_1\,.$$

Отсюда,

$$|\,I[\varphi]\,|<\sum_{l=1}^{m}\left|\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right|+\varepsilon_1\,. \tag{7.2.23}$$

Нашей ближней целью теперь является доказательство следующего утверждения.

Лемма 7.2.3 *В предположениях теоремы* 7.2.1 *для произвольной функции $\varphi\in C_0^\infty(D)$ и всякого $l=1,\ldots,m$ имеет место соотношение*

$$\left|\int\limits_{\lambda B(x_l,r_l)} d\,(\varphi\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right|\le c(\omega,\lambda,\varphi)\,\omega(r_l)\,, \tag{7.2.24}$$

где

$$c(\omega,\lambda,\varphi)=c(\lambda,\omega)\,\left(\max_D|\nabla\varphi|+c(n,\lambda)\,\frac{1}{r_l}\right)$$

– постоянная.

Доказательство. Достаточно воспользоваться соотношением (7.2.13) и заметить, что

$$\left|\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right| \le \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)|\;dx \le$$

$$\le \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |d(\varphi\,\varphi_l)|\;|\theta-\theta_0|\;dx \le$$

$$\le \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} (|\varphi|\,|\nabla\varphi_l| + |\nabla\varphi|\,|\varphi_l|)\;|\theta-\theta_0|\;dx \le$$

$$\le \left(\max_{\lambda Q(x_l,r_l)} |\nabla\varphi_l| + \max_D |\nabla\varphi|\right) \int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |\theta-\theta_0|\;dx\,.$$

□

Не ограничивая общности можем считать форму θ_0 выбранной так, что

$$\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |\theta-\theta_0|\;dx \le \kappa(\lambda Q(x_l,r_l),\theta)\,.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{\lambda Q(x_l,r_l)} d(\varphi\,\varphi_l)\wedge(\theta-\theta_0)\right| \le$$

$$\le \left(\max\nolimits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |\nabla\varphi_l| + \max\nolimits_D |\nabla\varphi|\right)\;\omega(\lambda r_l) \le$$

$$\le c(\omega_1,\lambda)\,\omega(r_l)\;\left(\max\nolimits_{\lambda Q(x_l,r_l)} |\nabla\varphi_l| + \max\nolimits_D |\nabla\varphi|\right)\;\le$$

$$\le c(\omega_1,\lambda)\,\omega(r_l)\;\left(\max\nolimits_D |\nabla\varphi| + c(n,\lambda)\,\frac{1}{r_l}\right) = c(\omega,\lambda,\varphi)\omega(r_l)\,.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 7.2.1 просуммируем (7.2.24) по всем $l = 1, \dots, m$. Тогда имеем

$$\sum_{l=1}^{m} \left| \int\limits_{\lambda Q(x_l, r_l)} d(\varphi\,\varphi_l) \wedge \theta \right| \le c(\omega, \lambda) \sum_{l=1}^{m} \omega(r_l)\, r_l^{-1}\, (\delta\,\delta' + c(n, \lambda)) \; .$$

Пользуясь (7.2.22), (7.2.23) и, полагая ε', $\delta \to 0$, получаем

$$|\, I[\varphi]\, | \le \varepsilon_1 + c(n, \lambda)\, c(\lambda, \omega) \lim_{\delta \to 0} \sum_{l=1}^{m} \omega(r_l)\, r_l^{-1} = \varepsilon_1 + c(n, \lambda)\, c(\lambda, \omega)\, \mathcal{D}^h\,(E)\,.$$

Данное соотношение влечет (7.2.14). □

Отметим следующий специальный случай доказанной теоремы.

Следствие 7.2.1 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$, ω – калибровочная функция, обладающая свойством* (7.2.1), *и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть θ, $\deg\theta = n - 1$, – слабо замкнутая в $D \setminus E$ дифференциальная форма, удовлетворяющая* (7.2.13).

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ для $h(t) = \omega(t)\, t^{-1}$, то форма θ слабо замкнута в D.

Для **доказательства** достаточно заметить, что предположение об обращении в нуль h-меры Хаусдорфа множества E влечет равенство нулю бинарной меры $\mathcal{D}^h(E)$. □

7.2.4 Доказательство теоремы 7.2.2

Пусть $U \subset D$ – подобласть, содержащая $E \subset U \subset\subset D$. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность открытых множеств, $U_k \subset U$, для которой

$$E \subset U_k, \quad \overline{U}_k \subset U, \quad \cap_{k=1}^{\infty} U_k = E.$$

Зафиксируем неотрицательную липшицеву функцию $\psi : D \to \mathbb{R}$, $0 \le \psi \le 1$, с компактным носителем и такую, что $\psi \equiv 1$ на U. Фиксируем $k = 1, 2, \dots$ и липшицеву функцию $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $0 \le \varphi \le 1$, со свойствами:

$$\varphi|_E = 0, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset U_k, \quad \varphi = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in D \setminus U_k.$$

Форма $\psi^p\varphi^p Z\wedge\theta$ имеет компактный носитель, содержащийся в $D\setminus E$. Пользуясь (2.1.18), имеем

$$\int\limits_{D\setminus E} d\,(\psi^p\varphi^p Z\wedge\theta)=0.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{D\setminus E}\psi^p\varphi^p\,dZ\wedge\theta+(-1)^{\deg Z+1}\int\limits_{D\setminus E}\psi^p\varphi^p Z\wedge d\theta=-\int\limits_{D\setminus E} d\,(\psi^p\varphi^p)\wedge Z\wedge\theta.$$

Заметим, что

$$dZ\wedge\theta=\langle dZ,*\theta\rangle dx.$$

Форма θ замкнута и, тем самым, на основании (7.2.17) и (7.2.18) получаем

$$\begin{aligned}\mu_1\int\limits_{D\setminus E}\psi^p\varphi^p\,\mu(x)\,|dZ|^p dx\ &\le\int\limits_{D\setminus E}\psi^p\varphi^p\,\langle dZ,*\theta\rangle dx=\\ &=-\int\limits_{D\setminus E} d\,(\psi^p\varphi^p)\wedge Z\wedge\theta=\\ &=-\int\limits_{D\setminus E}\langle d\,(\psi^p\varphi^p)\wedge Z,*\theta\rangle\,dx\le\\ &\le\mu_2\int\limits_{D\setminus E}|d\,(\psi^p\varphi^p)\wedge Z|k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx.\end{aligned}$$

В соответствии с (7.2.19) существует постоянная $0<M<\infty$ такая, что

$$|Z(x)|<M\quad\text{п.в. на}\quad D\setminus E.$$

Таким образом, мы получаем

$$\mu_1\int\limits_{D\setminus E}\psi^p\varphi^p\,k(x)\,|dZ|^p dx\le\mu_2\,M\int\limits_{D\setminus E}|d\,(\psi^p\varphi^p)\,|\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx.$$

Однако,

$$|d\,(\psi^p\varphi^p)\,| \le p\,\varphi^p\psi^{p-1}|\nabla\psi| + p\,\varphi^{p-1}\psi^p|\nabla\varphi|$$

и

$$\mu_1 \int\limits_{D\setminus E} \psi^p\varphi^p\,k(x)\,|dZ|^p dx \le p\mu_2\,M \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p\psi^{p-1}|\nabla\psi|\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx+$$

$$+p\mu_2\,M \int\limits_{D\setminus E} \psi^p\varphi^{p-1}|\nabla\varphi|\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx. \qquad (7.2.25)$$

Предположим теперь, что $p > 1$. Воспользуемся неравенством Коши

$$a\,b^{p-1} \le \frac{\varepsilon^p}{p}\,a^p + \frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{p/(1-p)}\,b^p, \quad a,\, b,\, \varepsilon > 0\,. \qquad (7.2.26)$$

При $\varepsilon > 0$ данное неравенство влечет, что

$$\int\limits_{D\setminus E} \varphi^p\psi^{p-1}|\nabla\psi|\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx \;\le \frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{p/(1-p)} \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p\psi^p\,k(x)\,|dZ|^p\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p k(x)\,|\nabla\psi|^p\,dx\,,$$

$$\int\limits_{D\setminus E} \varphi^{p-1}\psi^p|\nabla\varphi|\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx \;\le \frac{p-1}{p}\,\varepsilon^{\frac{p}{1-p}} \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p\psi^p\,k(x)\,|dZ|^{p-1}\,dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_{D\setminus E} \psi^p k(x)\,|\nabla\varphi|^p\,dx.$$

Соотношение (7.2.25) влечет

$$\mu_1 \int\limits_{D\setminus E} \psi^p \varphi^p \, k(x) \, |dZ|^p dx \le C_1 \int\limits_{D\setminus E} \psi^p \varphi^p \, k(x) \, |dZ|^p dx +$$

$$+ C_2 \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p k(x) \, |\nabla \psi|^p \, dx + C_2 \int\limits_{D\setminus E} \psi^p k(x) \, |\nabla \varphi|^p \, dx,$$

где

$$C_1 = 2\,(p-1)\,\mu_2\, M\, \varepsilon^{p/(1-p)} \quad \text{и} \quad C_2 = \mu_2\, M\, \varepsilon^p.$$

Выберем $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $C_1 = \frac{1}{2}\mu_1$. Тогда имеем

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{D\setminus E} \psi^p \varphi^p \, k(x) \, |dZ|^p dx \le$$

$$\le \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{D\setminus E} \varphi^p k(x) \, |\nabla \psi|^p \, dx + \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{D\setminus E} \psi^p k(x) \, |\nabla \varphi|^p \, dx =$$

$$= \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{U_k\setminus E} k(x) \, |\nabla \varphi|^p \, dx + \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{D\setminus U} k(x) \, |\nabla \psi|^p \, dx$$

и, в силу $0 \le \psi, \, \varphi \le 1$,

$$\tfrac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{U\setminus U_k} k(x) \, |dZ|^p dx \le \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{U_k\setminus E} k(x) \, |\nabla \varphi|^p \, dx +$$

$$+ \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \int\limits_{D\setminus U} k(x) \, |\nabla \psi|^p \, dx.$$

Специальные свойства φ и ψ влекут

$$\frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{U\setminus U_k} k(x)\,|dZ|^p dx \le \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \operatorname{cap}_{p,k}(E, D\setminus U_k; D) + \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \operatorname{cap}_{p,k}(U, D\setminus \operatorname{supp}\psi; D)$$

Однако, $\operatorname{cap}_{p,k}(E, D \setminus U_k; D) = 0$ и мы приходим к оценке

$$\frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{U\setminus U_k} k(x)\,|dZ|^p dx \le \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \operatorname{cap}_{p,k}(U, D \setminus \operatorname{supp}\psi; D)$$

и, далее, поскольку $\mathcal{H}^n(E) = 0$,

$$\frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{U} k(x)\,|dZ|^p dx \le \mu_2\, M\, \varepsilon_0^p \operatorname{cap}_{p,k}(U, D \setminus \operatorname{supp}\psi; D)\,. \tag{7.2.27}$$

Предположим теперь, что $p = 1$. Неравенство (7.2.25) влечет

$$\mu_1 \int\limits_{D\setminus E} \psi\varphi\, k(x)\,|dZ|\,dx \le \mu_2\, M \int\limits_{D\setminus E} \varphi|\nabla\psi|\, k(x)\,dx + \mu_2\, M \int\limits_{D\setminus E} \psi|\nabla\varphi|\, k(x)\,|dZ|\,dx.$$

Как и при доказательстве (7.2.27), находим

$$\mu_1 \int\limits_{U} k(x)\,|dZ|\,dx \le \mu_2\, M \operatorname{cap}_{1,k}(U, D; D)\,. \tag{7.2.28}$$

По лемме 1.1.2 множество E имеет $(n-1)$-мерную меру нуль. Тем самым, коэффициенты Z могут быть продолжены до $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$-функций в D. Это обеспечивает справедливость оценок (7.2.27), (7.2.28) и выполнение ACL-свойства в области D.

Таким образом, форма Z может быть продолжена до некоторой формы $\tilde{Z}$. Более того, ясно, что $d\tilde{Z} \in L^p_{\mathrm{loc}}(D)$.

В силу (7.2.18), форма θ принадлежит классу $L^q(D \setminus E)$ и ее расширение $\widetilde{\theta}$ обладает нужным свойством. Теорема доказана. $\square$

7.3 Особенности A-решений

Укажем некоторые применения полученных результатов для A-решений с особенностями.

Теорема 7.3.1 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти-решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения* (7.1.4), *удовлетворяющего предположениям* (7.1.2), (7.1.3).

Предположим также, что для всякого бинарного куба $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (7.2.1) *выполнено*

$$\mu_2 \int\limits_{Q(x,r)\setminus E} k(x)\, |\nabla f(x)|^{p-1}\, dx \le \Omega(r)\,. \tag{7.3.1}$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ при $h(t) = \Omega(t)\, t^{-1}$, то f является почти-решением в D уравнения (7.1.4) *с уклонением ε_3, определенным как в* (7.2.14).

Доказательство. Положим

$$\theta(x) = * \sum_{i=1}^{n} A_i(x, \nabla f)\, dx_i\,.$$

Для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(D \setminus E)$, $0 \le \varphi(x) \le 1$, имеем

$$d\varphi \wedge \theta = \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla f)\rangle\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,.$$

Тем самым, условие (7.1.7) влечет

$$\left| \int\limits_{D\setminus E} d\varphi \wedge \theta \right| < \varepsilon_1\,,$$

и форма θ почти замкнута в $D \setminus E$ с уклонением ε_1.

Так как

$$|\theta(x)| = |A(x, \nabla f)|\,,$$

то предположение (7.3.1) гарантирует выполнение (7.2.13) с функцией

$$\omega(t) = \frac{1}{\mu_2}\Omega(t)\,.$$

На основании теоремы 7.2.1 заключаем, что f есть почти-решение в области D с уклонением ε_3. $\Box$

Следствие 7.3.1 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – обобщенное решение в $D \setminus E$ уравнения* (7.1.4), *удовлетворяющего предположениям* (7.1.2), (7.1.3).

Предположим также, что для всякого бинарного $Q(x,r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (7.2.1) *выполнено*

$$\mu_2 \int\limits_{Q(x,r)\setminus E} k(x)\,|\nabla f(x)|^{p-1}\,dx \le \Omega(r)\,. \tag{7.3.2}$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ при $h(t) = \Omega(t)\,t^{-1}$, то f является обобщенным решением в D уравнения (7.1.4).

Некоторые весьма тонкие результаты, касающиеся проблемы устранимых особенностей p-гармонических функций, анонсированы А.В. Покровским [225]. Относительно других специальных случаев утверждения об устранимых особенностях решений эллиптических уравнений см. [25], [26], [130], [192], [37], [38], [239], [238], [147], [79], [95], [190] и др. Постановка задачи о решениях эллиптических уравнений с особенностями, как почти-решениях, кажется, является новой.

7.3.1 Решения уравнения газовой динамики

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера обобщенные решения уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma(q) f_{x_i}\right) = 0, \quad q = |\nabla f|, \tag{7.3.3}$$

где
$$\sigma(q) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2\right)^{1/(\gamma-1)} .$$

При $n = 2$ мы имеем классическое уравнение газовой динамики. Данное уравнение описывает потенциал скоростей плоского установившегося течения идеального газа в адиабатическом режиме; γ, $-\infty < \gamma < +\infty$, — постоянная, характеризующая газ (см., например, [60, §15 главы IV]). Для $\gamma = 1 \pm 0$ имеем
$$\sigma(q) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\, q^2\right\}.$$

В случае $n = 2$ данное уравнение имеет эллиптический тип при $\gamma \leq 1$. Для $\gamma > 1$ оно эллиптично при $q < \sqrt{2/(\gamma - 1)}$ и параболично при $q = \sqrt{2/(\gamma - 1)}$. В общем случае при $n \geq 2$ мы предполагаем, что
$$\begin{gathered} \text{или } \gamma \leq 1, \\ \text{или } \ \gamma > 1 \text{ и } \operatorname{ess\,sup}_{D'} q(x) < \sqrt{2/(\gamma - 1)} \\ \text{для всякой подобласти } D' \subset\subset D\,. \end{gathered} \tag{7.3.4}$$

Если решение f фиксировано, то мы можем рассматривать σ как некоторую (наперед заданную) измеримую функцию переменной x. Решения уравнения (7.3.3), в котором весовая функция σ есть функция переменной x, называются *σ-гармоническими функциями.* Изучению таких функций посвящено значительное количество работ (см., например, [120], [149] и цитированную там литературу).

Теорема 7.3.2 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество. Пусть f – почти-решение с уклонением $\varepsilon_1 > 0$ в $D \setminus E$ уравнения* (7.3.3), *удовлетворяющего предположениям* (7.3.4).

Предположим также, что для всякого бинарного $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции Ω со свойством (7.2.1) *выполнено*
$$\int\limits_{Q(x,r)\setminus E} \sigma(|\nabla f(x)|)\, |\nabla f(x)|\, dx \leq \Omega(r)\,. \tag{7.3.5}$$

Тогда если $\mathcal{D}^h(E) = \varepsilon_2 < \infty$ *для* $h(t) = \Omega(t)\,t^{-1}$, *то* f *является почти-решением в* D *уравнения* (7.3.3) *с уклонением* ε_3, *определенным как в теореме* (7.2.14).

Доказательство. Положим
$$\mu_2\, k(x) = \sigma(|\nabla f(x)|)\,.$$
Предположение (7.3.4) влечет выполнение свойства (7.1.1) для весовой функции k. Для нужного заключения достаточно заметить, что из (7.3.5) следует (7.3.1) и воспользоваться теоремой 7.3.1. □

Следствие 7.3.2 *Пусть* D – *подобласть* $\mathbb{R}^n$ *и пусть* $E \subset D$ – *замкнутое относительно* D *множество. Пусть* f – *обобщенное решение уравнения* (7.3.3) *в* $D \setminus E$, *удовлетворяющего предположениям* (7.3.4).

Предположим, что для всякого бинарного куба $Q(x,r) \subset D$ *и некоторой калибровочной функции* Ω *со свойством* (7.2.1) *выполнено*
$$\int\limits_{Q(x,r)\setminus E} \sigma(|\nabla f(x)|)\,|\nabla f(x)|\,dx \le \Omega(r)\,. \tag{7.3.6}$$

Тогда если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ *при* $h(t) = \Omega(t)\,t^{-1}$, *то* f *является обобщенным решением в* D *уравнения* (7.3.3).

Приведем емкостной вариант теоремы об устранимых особенностях.

Теорема 7.3.3 *Пусть* D – *подобласть* $\mathbb{R}^n$ *и пусть* $E \subset D$ – *компактное относительно* D *подмножество. Пусть* f – *ограниченное решение уравнения* (7.3.3) *в* $D \setminus E$, *удовлетворяющее* (7.3.4). *Тогда если*
$$\operatorname{cap}_{k,1} E = 0 \tag{7.3.7}$$
при
$$k(x) = \sigma(|\nabla f(x)|)\,,$$
то множество E *устранимо для* f, *т.е. существует функция* $\tilde f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ *такая, что* $\tilde f|_{D\setminus E} = f$ *и удовлетворяет* (7.3.3) *в* D.

Доказательство. Зафиксируем постоянную γ со свойством (7.3.4) и решение f. Положим $k(x) = \sigma(|\nabla f(x)|)$ в $D \setminus E$. Предположение (7.3.7) допускает использование теоремы 7.2.2. Отсюда выводим необходимое утверждение. □

Следствие 7.3.3 *Пусть D – подобласть $\mathbb{R}^n$ и пусть $E \subset D$ – компактное относительно D подмножество. Пусть f – ограниченное решение уравнения* (7.3.3) *в $D \setminus E$, удовлетворяющее* (7.3.4). *Если $\gamma \geq 1$ и $\mathcal{H}^{n-1}(E) = 0$, то множество E устранимо для f в D.*

Доказательство. Так как $\gamma > 1$, то $\sigma(t) < 1$. Тем самым, для произвольной функции φ, допустимой в вариационной проблеме (1.1.11), мы имеем
$$\int\limits_{D\setminus E} \mu(x)\,|\nabla\varphi|\,dx \leq \int\limits_{D\setminus E} |\nabla\varphi|\,dx$$
и для всякого конденсатора $(A, B; D)$,
$$\mathrm{cap}_{k,1}(A, B; D) \leq \mathrm{cap}_1(A, B; D)\,.$$
Согласно лемме 1.1.2 мы вправе заключить теперь, что
$$\mathrm{cap}_{k,1} E = 0\,.$$
Тем самым, соотношение (7.3.7) выполнено и теорема 7.3.3 влечет наше утверждение. □

7.3.2 Приложения к отображениям с ограниченным искажением

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Напомним, что непрерывное отображение $F : U \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U)$ является отображением с ограниченным искажением, если почти всюду в U выполнено (1.1.17).

Отметим специальный случай теоремы 7.2.1.

Теорема 7.3.4 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D подмножество. Пусть $F : D\setminus E \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением, имеющее непрерывное продолжение F^* на E.*

Предположим, что для любого бинарного куба $Q(x, r) \subset D$ и некоторой калибровочной функции ω со свойством (7.2.1) *выполнено*
$$\int\limits_{Q(x,r)\setminus E} |F'|^{n-1}\,dx \leq \omega(r)\,. \tag{7.3.8}$$

Если $\mathcal{H}^h(E) = 0$ *при* $h(t) = \omega(t)\, t^{-1}$, *то* E *устранимо и отображение* F^* *квазирегулярно в* D.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\theta = dF_2 \wedge \ldots \wedge dF_n\,.$$

Мы имеем

$$\langle dF_1, *\theta\rangle = J_F(x)\,.$$

Согласно теореме 2.2.5 неравенство (1.1.17) влечет, что

$$|\theta|^{n/(n-1)} \le c(n,K)\,|F'|^n \le c_1(n,K)\,|dF_1|^n\,.$$

На основании теоремы 7.2.1 заключаем, что для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C^\infty(D)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset D$, справедливо соотношение

$$\int\limits_D d(\varphi^n\, F_1) \wedge \theta = 0\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D \varphi^n\, dF_1 \wedge \theta = -\int\limits_D F_1\, d\varphi^n \wedge \theta$$

и

$$\int\limits_D \varphi^n\, J_F(x)\, dx = n\int\limits_D \varphi^{n-1}\, F_1\, d\varphi \wedge \theta\,.$$

Однако, согласно (1.1.17),

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le K\int\limits_D \varphi^n J_F(x)\, dx$$

и потому

$$|F_1\, d\varphi \wedge \theta| \le |\nabla\varphi|\,|F_1|\,|\theta|\,.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le \int\limits_D \varphi^{n-1}\,|\nabla\varphi|\,|F_1|\,|\theta|\, dx\,.$$

Легко видеть, что

$$|\theta| \le c_2(n)\,|F'|^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le c_2(n) \int\limits_D \varphi^{n-1}\,|\nabla\varphi|\,|F_1|\,|F'|^{n-1}\,dx\,.$$

На основании неравенства Гельдера можем записать

$$\int\limits_D \varphi^{n-1}|\nabla\varphi|\,|F_1|\,|F'|^{n-1}\,dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_D |F_1|^n\,|\nabla\varphi|^n dx\right)^{1/n} \left(\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx\right)^{n/(n-1)}.$$

Отсюда выводим

$$\int\limits_D \varphi^n |F'|^n dx \le c_2(n) \int\limits_D |F|^n\,|\nabla\varphi|^n dx\,. \tag{7.3.9}$$

Так как $\mathcal{H}^h(E) = 0$, то либо $|F'| = 0$ почти всюду в D, а потому $F \equiv \mathrm{const}$, либо

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} > 0\,. \tag{7.3.10}$$

Соотношение (7.3.10) влечет $\mathcal{H}^n(E) = 0$. Но $F^* \in C^0(D)$ и потому F_1 принадлежит классу ACL в D. Так как φ произвольна, то из (7.3.9) вытекает $F' \in L^n_{\mathrm{loc}}(D)$. Тем самым, мы заключаем, что $F_1 \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$.

Используя те же самые аргументы для каждой функции $F_2, \dots, F_n$, легко убедиться, что отображение $F \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и, следовательно, оно квазирегулярно в всей области D. □

Следствие 7.3.4 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, пусть $E \subset D$ – замкнутое относительно D множество, и пусть $F : D \setminus E \to \mathbb{R}^n$ – квазирегулярное отображение.*

Если $F \in \mathrm{Lip}(D \setminus E)$ и $\mathcal{H}^n(E) = 0$, то E устранимо для F.

Доказательство. Достаточно заметить, что предположение $F \in \mathrm{Lip}(D \setminus E)$ влечет

$$\sup_{x\in D\setminus E} |F'| < \infty\,.$$

Утверждение следует из теоремы 7.3.4 при $\omega(t) = t$. $\square$

Отметим другую версию теоремы об устранимых особенностях [208]. Рассмотрим случай римановых многообразий. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – римановы многообразия размерностей $\dim \mathcal{A} = k$, $\dim \mathcal{B} = n - k$, $1 \le k \le n$. Декартово произведение $\mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ обладает естественной структурой риманова многообразия. Обозначим через $\pi : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и $\eta : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ естественные проекции многообразия $\mathcal{N}$ на подмногообразия.

Если $v_{\mathcal{A}}$ и $v_{\mathcal{B}}$ суть формы объема на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, то дифференциальная форма $v_{\mathcal{N}} = \pi^* v_{\mathcal{A}} \wedge \eta^* v_{\mathcal{B}}$ является формой объема на $\mathcal{N}$.

Теорема 7.2.2 при $k(x) \equiv 1$ может быть использована для доказательства следующего признака устранимости особенностей отображения с ограниченным искажением [208].

Теорема 7.3.1 *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – римановы многообразия,*

$$\dim \mathcal{A} = k\,, \ \ \dim \mathcal{B} = n - k\,, \ \ 1 \le k \le n \quad \text{и} \ \mathcal{N} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}\,.$$

Пусть $\mathcal{M}$ – n-мерное многообразие без края и пусть $E \subset \mathcal{M}$ – компактное множество n/k-емкости нуль.

Если $F : \mathcal{M} \setminus E \to \mathcal{N}$ есть отображение с ограниченным искажением, $f = \pi \circ F$, и форма Z, $dZ = f^* v_A$, удовлетворяет (7.2.19), *то найдется отображение с ограниченным искажением $\tilde{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, для которого $\tilde{F}|_{\mathcal{M}\setminus E} = F$.*

Для **доказательства** достаточно вспомнить теорему 2.2.5 и воспользоваться теоремой 7.2.2. $\square$

Отметим специальный случай теоремы 7.3.1.

Следствие 7.3.5 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $1 \le k \le n$, и пусть $E \subset D$ – компактное множество n/k-емкости нуль. Предположим, что отображение с ограниченным искажением*

$$F = (F_1, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n) : D \setminus E \to \mathbb{R}^n$$

подчинено (7.2.19) *для*

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} c_i \, F_i dF_1 \wedge dF_2 \wedge \ldots \wedge \widetilde{dF_i} \wedge \ldots \wedge dF_k \,,$$

где символ $\widetilde{dF_i}$ *означает, что этот сомножитель отсутствует и* $c_i = \mathrm{const}$, $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$.

Тогда найдется отображение с ограниченным искажением $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}^n$ *такое, что* $\tilde{F}\Big|_{D\setminus E} = F$.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} dZ \; &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} c_i \, dF_i \wedge dF_1 \wedge dF_2 \wedge \ldots \wedge \widetilde{dF_i} \wedge \ldots \wedge dF_k = \\ &= dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_k \,. \end{aligned}$$

Если положить

$$\theta = dF_{k+1} \wedge \ldots \wedge dF_n \,,$$

то в соответствии с теоремой 2.2.5 пара форм $w = dZ$ и θ удовлетворяет требованиям (7.2.17) и (7.2.18) на множестве $D \setminus E$. Пользуясь теоремой 7.3.1, заключаем, что формы Z и θ могут быть продолжены на всю область D. При этом, для всякой подобласти D', $E \subset D' \subset\subset D$ выполнено

$$\begin{aligned} \int\limits_{D'\setminus E} J_F(x) \, dx_1 \ldots dx_n \; &= \int\limits_{D'\setminus E} dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_n = \\ &= \int\limits_{D'\setminus E} dZ \wedge \theta \le \\ &\le C \int\limits_{D'\setminus E} |dZ| \, |\theta| \, dx_1 \ldots dx_n \le \\ &\le C \, \|dZ\|_{L^p(D'\setminus E)} \|\theta\|_{L^q(D'\setminus E)} \,, \end{aligned}$$

где $C = \mathrm{const} < \infty$ и $p = n/k$, $q = n/(n-k)$ (см. (2.1.12)).

Отсюда нетрудно усмотреть, что вектор – функция F принадлежит классу $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ в D и множество E устранимо для отображения F. $\square$

В случае $k = 1$ получаем известное утверждение [69].

Следствие 7.3.6 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть $E \subset D$ – компактное множество нулевой n-емкости. Предположим, что*

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : D \setminus E \to \mathbb{R}^n$$

есть отображение с ограниченным искажением, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x \in D \setminus E} |F_1(x)| < \infty \, .$$

Тогда существует отображение с ограниченным искажением $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}^n$ такое, что его сужение $\tilde{F}\Big|_{D \setminus E} = F$.

При $k = n$ имеем

Следствие 7.3.7 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, и пусть $E \subset D$ – компактное множество нулевой $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. Предположим, что*

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : D \setminus E \to \mathbb{R}^n$$

есть отображение с ограниченным искажением, подчиненное условию

$$\operatorname{ess}\sup_{x \in D \setminus E} J_F(x) < \infty \, .$$

Тогда существует отображение с ограниченным искажением $f^* : D \to \mathbb{R}^n$, сужение которого $f^*|_{D \setminus E} = f$.

Доказательство. Так как якобиан F ограничен и E имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру, то квазирегулярность F влечет, что F и форма

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i F_i \, dF_1 \, dF_2 \wedge \dots \widetilde{dF_i} \dots \wedge dF_n$$

принадлежат классу $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(D)$. Нужное утверждение вытекает из следствия 7.3.5. $\square$

Замечание 7.3.1 *Заметим, что следствие 7.3.7 имеет и несложное альтернативное доказательство. Так как якобиан $J_F(x)$ ограничен и E – множество $(n-1)$-мерной меры нуль, то квазирегулярность F влечет принадлежность производных вектор – функции F классу $L^\infty_{\rm loc}(D)$. Тем самым, F удовлетворяет условию Липшица в $D\setminus E$. Это означает, что F может быть продолжено до липшицева отображения на всю область D. Ясно, что результатом продолжения является отображение с ограниченным искажением D.*

Следствие 7.3.7 приводит к следующей версии хорошо известной теоремы Пенлеве (см., например, [210, Матилла]).

Следствие 7.3.8 *Пусть $E\subset D\subset \mathbf{C}$ – компактное множество нулевой линейной меры. Пусть $F: D\setminus E\to \mathbf{C}$ – голоморфная функция. Множество E устранимо для F тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in K\setminus E}|F'(z)|<\infty\,,$$

для всякого компактного подмножества $K\subset D$.

Другие признаки устранимости особого множества для отображений с ограниченным искажением см. И.Н. Песин [94], Вяйсяля [240, раздел 35], В.В. Асеев, А.В. Сычев [7], [109, с. 108-113], А.П. Копылов [54], С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн [18], Р. Кауфман и Ж.-М. Ву [187], А.П. Девятков, В.И. Кругликов [27], О. Мартио, В.М. Миклюков, М. Вуоринен [208] и др.

Глава 8

Почти квазиконформные отображения

Доказывается, что отображения класса $W^{1,n}_{\text{loc}}$, почти квазиконформно близкие к квазиизометрическим отображениям, при определенных условиях сами квазиизометричны. Приводятся оценки искажения внутреннего расстояния при таких отображениях. Указаны применения в теории неявных функций. Основные результаты опубликованы в [211].

8.1 Искажение евклидова расстояния

8.1.1 Квазиконформно близкие отображения

Напомним сначала некоторые понятия.

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – отображение класса $W^{1,n}_{\text{loc}}(D)$. Положим

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и, далее,

$$|f'(x)| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right)^{1/2}, \qquad \|f'\|_D = \operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|f'(x)|\,.$$

Следуя Кэллендеру [129], будем говорить, что отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$ является *почти квазиконформным* в D с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией $\delta(x) : D \to \mathbb{R}$, если почти всюду в области D выполнено

$$|f'(x)|^n \le K\det\,(f'(x)) + \delta(x)\,. \tag{8.1.1}$$

Напомним, что при $\delta \equiv 0$ требование (8.1.1) означает, что отображение f является отображением с ограниченным искажением [99, §3 глава I] (или, в терминологии [170, раздел 14.1] — квазирегулярным отображением).

Подчеркнем, что требование (8.1.1) не предполагает постоянства знака якобиана $\det\,(f'(x))$. Таким образом, почти квазиконформные отображения могут менять ориентацию.

Чтобы лучше оценить объем рассматриваемого класса отображений, имеет смысл отметить здесь следующее простое утверждение. Доказательство будет приведено ниже, в конце раздела.

Предложение 8.1.1 *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение, причем*

$$f \in W^{1,n}_{\rm loc}(D) \quad \textit{и} \quad \|f'\|_D \le q < \infty\,.$$

Тогда f почти квазиконформно с постоянной $K = \varepsilon\, n^{n/2}$ и $\delta = (1+\varepsilon)\, q^n$, где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ – произвольно.

Пусть $f,\ g : D \to \mathbb{R}^n$ – отображения класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$. Будем говорить, что отображение g является *почти квазиконформно близким* к f в D с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией δ, если отображение $\varphi = (f - g) : D \to \mathbb{R}^n$ почти квазиконформно с постоянной $K > 0$ и функцией δ, т.е. почти всюду в области D выполнено

$$|f'(x) - g'(x)|^n \le K\det\,(f'(x) - g'(x)) + \delta(x)\,. \tag{8.1.2}$$

Отображения f и g будем называть почти квазиконформно близкими, если g близко к f или f близко к g.

Если тождественно постоянное отображение $g \equiv \mathrm{const}$ почти квазиконформно близко в области $D \subset \mathbb{R}^n$ с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией δ к отображению f, то f почти квазиконформно с теми же постоянной $K > 0$ и функцией δ.

При $n = 2$ и $K = 2$, $\delta = 0$ неравенство (8.1.2) означает, что функция $f - g$ является голоморфной.

8.1.2 Интегральные средние

Ниже будет показано, что стекловские средние почти квазиконформного отображения сами являются почти квазиконформными.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $n \geq 2$, и $U \subset\subset D$ – непустое подмножество. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – почти квазиконформное отображение.

Рассмотрим усреднение этого отображения по В.А.Стеклову. Именно, для произвольного фиксированного числа h, $0 < h < \mathrm{dist}\,(U, \partial D)$, полагаем

$$f_h(x) = \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \ldots \int_0^h}_{n} f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\, dy_1 \ldots dy_n\,. \tag{8.1.3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.

Лемма 8.1.1 *При любых $x \in U$ и $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_h (x) = \frac{\partial f_h}{\partial x_i}(x) \tag{8.1.4}$$

и

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_h (x)\right| \leq \tag{8.1.5}$$

$$\leq \frac{1}{h^n} \int\limits_{Q(x,h)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| dy_1 \ldots dy_n\,,$$

где $Q(x, h)$ – куб с вершиной в точке x и ребрами длины h, направленными параллельно координатным осям в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Остановимся сперва на высказывании (8.1.4). Не умаляя общности можно считать, что $i = 1$. Введем обозначения

$$x = (x_1, x'), \quad x' = (x_2, \dots, x_n).$$

Мы имеем

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_h (x) = \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \cdots \int_0^h}_{n} \frac{\partial f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}{\partial x_1} dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \frac{1}{h^n} \int_{x_1}^{x_1+h} dt \underbrace{\int_0^h \cdots \int_0^h}_{n-1} \frac{\partial f(t, x' + y')}{\partial t}\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \frac{1}{h^n} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n-1} [f(x_1 + h, x' + y') - f(x_1, x' + y')]\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \frac{1}{h^n} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_1}^{x_1+h} dt \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n-1} f(t, x' + y')\, dy_2 \dots dy_n =$$

$$= \frac{1}{h^n} \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\, dy_1 \dots dy_n = \frac{\partial f_h}{\partial x_1}(x).$$

Тем самым, равенство (8.1.4) доказано.

Доказательство (8.1.5) следует из цепочки соотношений

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_h (x) \right| =$$

$$= \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{1}{h^n}\underbrace{\int\limits_0^h\cdots\int\limits_0^h}_{n}\frac{\partial f(x+y)}{\partial x_1}dy_1\dots dy_n\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h^n}\int\limits_{Q(x,h)}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right|\,dy_1\dots dy_n\,,$$

$\square$

Введем обозначения

$$\gamma_i(h) = \frac{1}{h^n}\int\limits_{Q(x,h)}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right|\,dy_1\dots dy_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

$$\gamma(h) = (\gamma_1(h), \gamma_2(h), \dots, \gamma_n(h))\,.$$

В силу (8.1.4), при всяком $i = 1, \dots, n$ можем записать

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_h(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \varepsilon_i(h)\,,$$

где, в силу (8.1.5), $\varepsilon_i(h)$ – некоторая вектор – функция, для которой

$$|\varepsilon_i(h)| \leq \gamma_i(h)\,.$$

Предположим, что вектор – функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ осуществляет почти квазиконформное отображение. Покажем, что сглаженное отображение $f_h : U \to \mathbb{R}^n$ также удовлетворяет условию (8.1.1). В качестве первого шага имеем

$$|(f_h)'| = \left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial f_h}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \varepsilon_j(h)\right|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^n|\varepsilon_j(h)|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника в $\mathbb{R}^n$.

Так как

$$(|a| + |b|)^n = |a|^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} |a|^k \, |b|^{n-k} + |b|^n \,,$$

и для произвольной постоянной $s > 0$ выполнено

$$|a|^k \, |b|^{n-k} \le \frac{k}{n} \frac{|a|^n}{s^{n/k}} + \frac{n-k}{n} \, s^{n/(n-k)} \, |b|^n \,, \quad 1 \le k \le n,$$

то

$$|a + b|^n \le |a|^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \frac{|a|^n}{s^{n/k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n-k}{n} \, s^{n/(n-k)} \, |b|^n + |b|^n =$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{k}{n \, s^{n/k}} \right) |a|^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n-k}{n} \, s^{n/(n-k)} + 1 \right) |b|^n \,.$$

Тем самым, мы получаем

$$|(f_h)'|^n \le A(s) \, |f'|^n + B(s) \, \left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(h)|^2 \right)^{n/2} \,,$$

или

$$|(f_h)'|^n \le A(s) \, |f'|^n + B(s) \, |\gamma(h)|^n \,, \tag{8.1.6}$$

где

$$A(s) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{k}{n \, s^{n/k}} \,, \quad B(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{n-k}{n} \, s^{n/(n-k)} + 1 \,.$$

Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ является почти квазиконформным отображением и подчинено условию

$$|f'(x)|^n \le K \det\left(f'(x)\right) + \delta(x)$$

с некоторой постоянной $K > 0$ и функцией $\delta(x)$, то соотношение (8.1.6) влечет

$$|(f_h)'|^n \le A(s) \, K \det\left(f'(x)\right) + A(s) \, \delta(x) + B(s) \, |\gamma(h)|^n \,. \tag{8.1.7}$$

Полагая $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, \varepsilon_{in})$, мы имеем

$$\det\left(f'(x)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_1} - \varepsilon_{11} & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_2} - \varepsilon_{21} \ldots & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_n} - \varepsilon_{n1} \\ \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_1} - \varepsilon_{12} & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_2} - \varepsilon_{22} \ldots & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_n} - \varepsilon_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_1} - \varepsilon_{1n} & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_2} - \varepsilon_{2n} \ldots & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_n} - \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \tag{8.1.8}$$

$$+(-1)^n \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_n} \\ \varepsilon_{12} & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \varepsilon_{1n} & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \ldots & \varepsilon_{n1} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \ldots & \varepsilon_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \varepsilon_{1n} & \varepsilon_{2n} \ldots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пользуясь неравенством Адамара, оценим определитель

$$I_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_n} \\ \varepsilon_{12} & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \varepsilon_{1n} & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Имеем

$$|I_1| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{1i}^2\right)^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} \times \cdots \times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

и, далее,

$$|I_1| \le \gamma(h) \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} \times \cdots \times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2} .$$

Заметим, однако, что

$$\left(\prod_{i=1}^{k} |a_i|\right)^{1/k} \le \frac{|a_1| + \ldots + |a_k|}{k} \le \left(\frac{|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2}{k}\right)^{1/2} \quad (k \ge 1) .$$

Таким образом,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} \times \cdots \times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2} \le \frac{1}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

а потому

$$|I_1| \le \frac{|\gamma(h)|}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{(n-1)/2} .$$

Для произвольного фиксированного $s_1 > 0$ находим

$$|I_1| \leq \frac{1}{n(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{|\gamma(h)|}{s_1}\right)^n + \frac{(n-1)\, s_1^{n/(n-1)}}{n(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{n/2} . \tag{8.1.9}$$

Аналогично, для второго определителя в (8.1.9)

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial f_{h1}}{\partial x_n} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial f_{h2}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots\dots & & \dots \\ \varepsilon_{1n} & \varepsilon_{2n} & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial f_{hn}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

имеем

$$|I_2| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{1i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{2i}^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_3}\right)^2\right]^{1/2} \times \dots \times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

и

$$|I_2| \leq \gamma^2(h) \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_3}\right)^2\right]^{1/2} \times \dots \times \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{|\gamma(h)|^2}{(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_i}\right|^2\right)^{(n-2)/2} .$$

Отсюда, как и выше, получаем

$$|I_2| \leq \frac{2|\gamma(h)|^n}{n(n-2)^{\frac{n-2}{2}} s_1^{n/2}} + \frac{(n-2) s_1^{\frac{n}{n-2}}}{n(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{n/2} . \tag{8.1.10}$$

Продолжая этот процесс, наконец, оцениваем последний определитель

$$I_n = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \dots & \varepsilon_{n1} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \dots & \varepsilon_{n2} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \varepsilon_{1n} & \varepsilon_{2n} \dots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} .$$

Имеем

$$|I_n| \le |\gamma(h)|^n . \tag{8.1.11}$$

Объединяя оценки (8.1.8) – (8.1.11), получаем

$$\det\left(f'(x)\right) \le \det\,\left((f_h)'(x)\right) + C(s_1)\,\gamma^n + D(s_1)\,\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{n/2} ,$$

где

$$C(s_1) = \frac{s_1^{-n}\,C_n^1}{n(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{2\,s_1^{-\frac{n}{2}}C_n^2}{n(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} + \ldots + \frac{(n-1)s_1^{-\frac{n}{n-1}}}{n} + 1$$

и

$$D(s_1) = \frac{(n-1)s_1^{\frac{n}{n-1}}\,C_n^1}{n(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{(n-2)s_1^{\frac{n}{n-2}}\,C_n^2}{n(n-2)^{\frac{n-2}{2}}} + \ldots + \frac{s_1^n}{n} .$$

Подставляя найденную оценку в соотношение (8.1.7), приходим к неравенству

$$|(f_h)'|^n \le A(s)\,K\det\,\left((f_h)'(x)\right) + A(s)\,\delta(x) +$$

$$+ \left(B(s) + A(s)\,K\,C(s_1)\right)\,\gamma^n(h) + A(s)\,K\,D(s_1)\,\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{n/2} .$$

Однако,

$$|(f_h)'|^n = \left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{hi}}{\partial x_j}\right|^2\right)^{n/2}$$

и

$$(1 - A(s)\,K\,D(s_1))\;|(f_h)'|^n \le A(s)\,K\det\,((f_h)'(x)) + A(s)\,\delta(x) + \\ + (B(s) + A(s)\,K\,C(s_1))\;\gamma^n(h)\,.$$

Выберем величины s, $s_1 > 0$ так, чтобы

$$0 < A(s)\,K\,D(s_1) < 1\,. \tag{8.1.12}$$

Это, очевидно, возможно в силу специальной структуры постоянных $A(s)$ и $D(s_1)$.

Тем самым, получаем

$$|(f_h)'(x)|^n \le K_1 \det\,((f_h)'(x)) + \delta_1(x)\,, \tag{8.1.13}$$

где

$$K_1 = \frac{A(s)\,K}{1 - A(s)\,K\,D(s_1)}$$

и

$$\delta_1(x) = \frac{A(s)\,\delta(x) + (B(s) + A(s)\,K\,C(s_1))\;\gamma^n(h)}{1 - A(s)\,K\,D(s_1)}\,.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение [87].

Теорема 8.1.1 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $n \ge 2$ и $U \subset\subset D$ – непустое множество. Тогда если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – почти квазиконформное отображение, то интегральные средние $f_h : U \to \mathbb{R}^n$, $0 < h <$* dist $(U, \partial D)$, *описываемые соотношением* (8.1.3), *суть почти квазиконформные отображения, удовлетворяющие условию* (8.1.13) *в предположении* (8.1.12).

Отметим также следующее высказывание.

Следствие 8.1.1 *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – отображение с ограниченным искажением, то интегральные средние $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, описываемые соотношением* (8.1.3), *суть почти квазиконформные отображения, удовлетворяющие условию* (8.1.13) *с* (8.1.12) *и* $\delta(x) \equiv 0$.

Некоторые вопросы аппроксимации квазиконформных отображений средними рассматривались А.П. Копыловым [52] - [55].

Упражнение. Рассмотреть аппроксимацию почти квазиконформных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$ интегральными средними вида

$$f_h(x) = C_h \int\limits_{|x-\xi|\le h} R(x-\xi, h)\, f(\xi)\, d\xi\,,$$

где

$$R(x,h) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{h^2}{h^2-|x|^2}\right] \quad \text{при} \quad |x| \le h\,, \\ 0 \quad \text{при} \quad |x| > h \end{cases}$$

и

$$1/C_h = \int\limits_{|x|\le h} R(x,h)\, dx\,.$$

8.1.3 Теорема об искажении

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $a \in D$ – произвольная точка,

$$0 < d \le \operatorname{dist}(a, \partial D)$$

и $\lambda > 0$ – некоторая постоянная. Будем говорить, что функция $\delta(x)$ класса $L^1_{\rm loc}(D)$ удовлетворяет (d,λ)-условию, если

$$\frac{1}{r} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n \le \lambda \int\limits_{S(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}\,, \quad 0 < r < d\,. \tag{8.1.14}$$

Основной результат главы составляет следующее утверждение.

Теорема 8.1.2 *Пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ – произвольная пара точек такая, что $d = |a_2 - a_1| > 0$. Пусть $D = B(a_1, d) \cup B(a_2, d)$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $b : D \to \mathbb{R}^n$ – (A', A'')-квазиизометрическое отображение.*

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(D)$, почти квазиконформно близкое к b с постоянной $K > 0$ и функцией $\delta(x)$, удовлетворяющей (d,λ)-условию с некоторой постоянной $\lambda \ge n/K$ в каждой из точек a_i, $i = 1, 2$.

Пусть

$$h = h(a_1, a_2) \equiv$$

$$\equiv \max_{i=1,2} \left(\frac{n}{|B(d)|} \int\limits_{B(a_i,d)} |f'(x) - b'(x)|^n \, d\mathcal{H}^n + \lambda \, d^{\frac{n-Kn}{K}} \int\limits_{B(a_i,r)} \delta^+(x) \, d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{1}{n}} ,$$

где

$$|B(d)| = \mathcal{H}^n(B(0,d)) \,, \quad \delta^+(x) = \max\{0, \delta(x)\} \,,$$

и пусть

$$\nu(n,K) \, h(a_1, a_2) < A' \,. \tag{8.1.15}$$

Тогда $f(a_1) \neq f(a_2)$ *и, более того,*

$$C' \, |a_2 - a_1| \, \leq |f(a_2) - f(a_1)| \leq C'' \, |a_2 - a_1| \,. \tag{8.1.16}$$

Здесь $\mathcal{H}^k(E)$ *– k-мерная мера Хаусдорфа множества* $E \subset \mathbb{R}^n$*,*

$$C' = A' - \nu(n,K) \, h(a_1, a_2) \,, \quad C'' = A'' + \nu(n,K) \, h(a_1, a_2)$$

и

$$\mu_n = \mathcal{H}^n \left(B(\xi_1, 1) \cap B(\xi_2, 1) \right) \,, \quad |\xi_1 - \xi_2| = 1,$$

$$\nu(n,K) = \frac{2K(nK - K + 1)\omega_{n-1}}{n^{(n-1)/n}(nK+1)\mu_n} \,, \quad \omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S(0,1)) \,.$$

Объем класса функций δ, удовлетворяющих (8.1.14) не вполне ясен. Легко видеть, что условию (8.1.14) удовлетворяют, например, функции $\delta \equiv \text{const}$ при $\lambda \geq 1/n$. Пользуясь леммой 8.5.1, нетрудно также усмотреть, что данному условию удовлетворяют функции $\delta(x) = |\varphi'(x)|$, где $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение с ограниченным искажением. При этом, если коэффициент искажения φ равен $K > 0$, то можно положить $\lambda = K/n$. Было бы желательно указать другие примеры.

8.1.4 Условие обратимости

Проблема обратимости отображения относится к числу хорошо известных проблем анализа, см. [58], [217], [185], [29, теорема 4.4.1 главы 1]

[36], [139], [227], [209], [222], [2, глава 2], [142, раздел V.2], [244], [195, глава 3] и др. Мы отметим здесь только один специальный случай теоремы 8.1.2, касающийся проблемы глобальной обратимости отображений класса $W^{1,n}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ и D – произвольная область вида $D = B(a_1, r) \cup B(a_2, r)$. Обозначим через $\mathcal{B}_f = \mathcal{B}_f(D, A', A'', K, \delta)$ множество всевозможных (A', A'')-квазиизометрий $b : D \to \mathbb{R}^n$, почти квазиконформно близких к f с постоянной $K > 0$ и интегрируемой в D функцией $\delta(x)$, удовлетворяющей (8.1.14) с $d = |a_2 - a_1|$ и $\lambda \geq n/K$.

Определим величину

$$\eta_f(a_1, a_2, \mathcal{B}_f) = \inf_b \max_{i=1,2} \frac{n}{\mathcal{H}^n(B(0,d))} \int\limits_{B(a_i,d)} |f'(x) - b'(x)|^n \, d\mathcal{H}^n \,,$$

где точная нижняя грань берется по всем квазиизометриям

$$b \in \mathcal{B}_f(D, A', A'', K, \delta) \,.$$

Из теоремы 8.1.2 вытекает

Следствие 8.1.2 *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение класса $W^{1,n}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что при любых a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\eta_f(a_1, a_2, \mathcal{B}_f) + \lambda \, d^{-n+n/K} \max_{i=1,2} \int\limits_{B(a_i,r)} \delta^+(x) \, d\mathcal{H}^n \leq \frac{1}{\nu^n(n,K)\,(A')^n} \,. \quad (8.1.17)$$

Тогда отображение f квазиизометрично в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, глобально обратимо.

8.2 Искажение при $W^{1,p}$-близких отображениях

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и $p \geq 1$ – некоторая постоянная. Пусть

$$f,\, g : D \to \mathbb{R}^n$$

– отображения класса $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$. Будем говорить, что отображение g является $W^{1,p}$-*близким* к f в D с неотрицательной функцией $\delta(x) \in L^p_{\rm loc}(D)$, если

$$|f'(x) - g'(x)| \leq \delta(x) \quad \text{почти всюду в } \ D\,. \tag{8.2.1}$$

Имеет место

Теорема 8.2.1 *Пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ – произвольная пара точек такая, что $d = |a_2 - a_1| > 0$. Пусть $D = B(a_1, d) \cup B(a_2, d)$ – область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение класса $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$.*

Предположим, что существует (A', A'')-квазиизометрическое отображение $b : D \to \mathbb{R}^n$, являющееся $W^{1,p}$-близким к f с функцией $\delta(x) > 0$, удовлетворяющей условию

$$\tau^{-n} \int\limits_{B(a_i,\tau)} \delta^p(x)\, d\mathcal{H}^n \leq r^{-n} \int\limits_{B(a_i,r)} \delta^p(x)\, d\mathcal{H}^n\,, \quad 0 < \tau < r < d\,, \tag{8.2.2}$$

для любого $i = 1, 2$.

Пусть

$$h_1(a_1, a_2) \equiv \max_{i=1,2} \left(d^{-n} \int\limits_{B(a_i,d)} \delta^p(x)\, d\mathcal{H}^n \right)^{\frac{1}{p}}$$

и пусть

$$\nu_1(n,p)\, h_1(a_1, a_2) < A'\,. \tag{8.2.3}$$

Тогда $f(a_1) \neq f(a_2)$ и, более того,

$$C'\, |a_2 - a_1| \ \leq |f(a_2) - f(a_1)| \leq C''\, |a_2 - a_1|\,. \tag{8.2.4}$$

Здесь

$$C' = A' - \nu_1(n,p)\, h_1(a_1, a_2)\,, \quad C'' = A'' + \nu_1(n,p)\, h_1(a_1, a_2)\,,$$

постоянные μ_n, ω_{n-1} определены выше и

$$\nu_1(n,p) = 2p\big(\omega_{n-1}/\, n\big)^{(p-1)/p} np \ / \left(\mu_n\, p(np + p)\right).$$

Функция $\delta \equiv \text{const}$ удовлетворяет (8.2.2). Выбирая в качестве $b(x)$ тождественное отображение, приходим к уже известному утверждению [244], [195].

Следствие 8.2.1 *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение класса $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что*

$$\|f'(x) - E_n\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta_0 \,, \tag{8.2.5}$$

где $\delta_0 \equiv \text{const}$ и E_n – единичная матрица. Тогда, если

$$q \equiv \delta_0 \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{1/p} < 1 \,, \tag{8.2.6}$$

то f глобально гомеоморфно, причем

$$(1-q)\,|a_2-a_1| \;\leq |f(a_2)-f(a_1)| \leq (1+q)\,|a_2-a_1| \quad \forall \;\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}^n \,. \tag{8.2.7}$$

8.3 Выпуклые и квазивыпуклые области

Пусть теперь $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область. Определим внутреннее расстояние $\rho_D(x',\, x'')$ между точками x' и x'' в D, полагая

$$\rho_D(x',\, x'') = \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} |dx|\,,$$

где точная нижняя грань берется по всем спрямляемым дугам $\gamma \subset D$, соединяющим точки x' и x''.

Определение 8.3.1 *Дисторсией области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется величина*

$$\mathrm{distort}\,(D) = \sup_{\substack{x',\, x'' \in D \\ x' \neq x''}} \frac{\rho_D(x'',\, x')}{|x'' - x'|}$$

(см. [161, раздел 1.14]).

Напомним, что область D называется выпуклой, если любые две ее точки могут быть соединены отрезком, целиком лежащим в D. Условие $\mathrm{distort}\,(D) < \infty$ влечет, что

$$\rho_D(x'',\, x') \le Q\,|x'' - x'|\,, \quad Q = \mathrm{distort}\,(D)\,. \tag{8.3.1}$$

Такие области $D \subset \mathbb{R}^n$ называются $Q-$*квазивыпуклыми* [161, с. 393], [131].

Понятно, что всякая выпуклая область является 1-квазивыпуклой.

Имеет место утверждение.

Теорема 8.3.1 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$. Предположим, что существует (A', A'')–квазиизометрия $b : D \to \mathbb{R}^n$, почти квазиконформно близкая к f с постоянной $K > 0$ и функцией $\delta(x) : D \to \mathbb{R}$, обладающей свойством* (8.1.14) *во всякой точке $a \in D$ и любых*

$$0 < d \le \mathrm{dist}\,(a, \partial D)\,, \quad \lambda \ge \frac{n}{K}\,.$$

Предположим также, что для любого шара $B(a, r) \subset D$ выполнено

$$\frac{n}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(a,r)} |f'(x) - b'(x)|^n \, d\mathcal{H}^n + \lambda\, r^{-n+\frac{n}{K}} \int\limits_{B(a,r)} \delta^+(x)\, d\mathcal{H}^n \le q \tag{8.3.2}$$

с некоторой постоянной

$$q < \frac{(A')^n}{\nu^n(n,K)}\,. \tag{8.3.3}$$

(i) *Тогда* $D' = f(D)$ *есть область и для произвольной пары точек* a', $a'' \in D$ *выполнено*

$$(A' - q^{1/n})\,\rho_D(a',a'') \le \rho_{D'}(f(a'),f(a'')) \le (A'' + q^{1/n})\,\rho_D(a',a'')\,. \tag{8.3.4}$$

(ii) *Если область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *выпукла, то область* $D' = f(D)$ *квазивыпукла с постоянной* $Q = A'' + q^{1/n}$ *и для произвольной пары точек* a', $a'' \in D$ *справедливы оценки*

$$(A' - q^{1/n})\,|a'' - a'| \le \rho_{D'}(f(a''),f(a')) \le (A'' + q^{1/n})\,|a'' - a'|\,. \tag{8.3.5}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение (i). Мы будем пользоваться теоремой 8.1.2. Предположение (8.3.2) влечет справедливость оценки (8.1.15) для произвольной пары точек $a_1, a_2 \in D$, обладающей свойством

$$|a_2 - a_1| < \min_{i=1,2} \operatorname{dist}(a_i, \partial D)\,. \tag{8.3.6}$$

Отсюда вытекает справедливость соотношений (8.1.16) с постоянными

$$C' = A' - q^{1/n}\,, \quad C'' = A'' + q^{1/n}\,.$$

Неравенства (8.1.16) означают, в частности, что f – локальный гомеоморфизм, а потому $D' = f(D)$ – область.

Пусть a', $a'' \in D$ – произвольная пара точек. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Выберем жорданову дугу $\gamma \subset D$ с концами в точках a' и a'' так, чтобы

$$\left|\mathcal{H}^1(\gamma) - \rho_D(a',a'')\right| < \varepsilon/2\,.$$

Устроим разбиение дуги γ следующими одна за другой точками a', x_1, …, x_n, a'' так, чтобы во-первых,

$$\left|\mathcal{H}^1(\gamma) - (|a' - x_1| + \ldots + |x_n - a''|)\right| < \varepsilon/2\,,$$

и во-вторых, чтобы соседние точки разбиения удовлетворяли (8.3.6).

В силу (8.1.16), имеем

$$|f(a') - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')| \le C''\,(|a' - x_1| + \ldots + |x_n - a''|)$$

и
$$|f(a') - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')| \le C''\,(\rho_D(a', a'') + \varepsilon)\,.$$
Устремляя мелкость разбиения к нулю, находим
$$\rho_{D'}(f(a'), f(a'')) \le \mathcal{H}^1(f(\gamma)) \le C''\,(\rho_D(a', a'') + \varepsilon)$$
и, учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$, приходим к верхней оценке в (8.3.4).

Нижняя оценка в (8.3.4) устанавливается в точности так же. Необходимо лишь потребовать, чтобы разбиение дуги γ точками a', x_1, …, x_n, a'' было таковым, чтобы во-первых, длина дуги $f(\gamma)$ мало отличалась от расстояния $\rho_{D'}(f(a'), f(a''))$ и, во-вторых, длина ломаной с вершинами в точках $f(a')$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, $f(a'')$ мало отличалась от длины дуги $f(\gamma)$. В силу (8.1.16), имеем
$$|f(a') - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')| \ge C'\,(|a' - x_1| + \ldots + |x_n - a''|)\,,$$
откуда легко следует нужное.

Докажем утверждение (ii). Фиксируем произвольно точки a', $a'' \in D$ и обозначим через $l(a', a'')$ прямолинейный отрезок, соединяющий a' и a''. Поскольку область D выпукла, то $l(a', a'')$ целиком лежит в D.

Разобьем отрезок $l(a', a'')$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, следующими одна за другой и такими, что каждый из отрезков
$$l(a', x_1)\,,\ l(x_1, x_2)\,,\ \ldots,\ l(x_n, a'')$$
удовлетворяет предположению (8.3.6). Тем самым, для каждого из таких отрезков имеем двусторонние оценки (8.1.16). Мы имеем
$$|f(a') - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')| \le$$
$$\le (A'' + q^{1/n})\,(|a' - x_1| + \ldots + |x_n - a''|) = (A'' + q^{1/n})\,|a' - a''|\,.$$

Выбирая разбиение $a', x_1, x_2, \ldots, x_n, a''$ отрезка $l(a', a'')$ сколь угодно мелким и замечая, что левая часть данного соотношения будет сколь угодно близка к $\mathcal{H}^1\, f(l(a', a''))$, получаем
$$\mathcal{H}^1\, f(l(a', a'')) \le (A'' + q^{1/n})\,|a' - a''|\,.$$
Отсюда,
$$r_{D'}(f(a'), f(a'')) \le (A'' + q^{1/n})\,|a' - a''|\,.$$

Тем самым, правое из соотношений (8.3.5) действительно имеет место, а область D' квазивыпукла с указанной в теореме постоянной Q.

С другой стороны, предположим, что $\gamma \subset D'$ – жорданова дуга с концевыми точками $f(a')$ и $f(a'')$, для которой

$$\left|\mathcal{H}^1(\gamma) - \rho_{D'}(f(a'), f(a''))\right| < \varepsilon/2\,,$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная.

Пусть $\Gamma = f^{-1}(\gamma)$. Выберем точки $x_1, \ldots, x_n$ на Γ так, чтобы расстояния $|a' - x_1|$, $|x_1 - x_2|$, …, $|x_n - a''|$ были меньше, чем $\operatorname{dist}(\Gamma, \partial D)$ и

$$\left|\mathcal{H}^1(\gamma) - (|f(a') - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')|)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, как и выше,

$$|f(a') - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(a'')| \geq$$

$$\geq (A' - q^{1/n})\,(|a' - x_1| + \ldots + |x_n - a''|) \geq (A' - q^{1/n})\,|a' - a''|\,.$$

Отсюда,

$$\rho_{D'}(f(a'), f(a'')) \geq (A' - q^{1/n})\,(|a' - a''| - \varepsilon)$$

и, в силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$,

$$(A' - q^{1/n})\,|a' - a''| \leq \rho_{D'}(f(a'), f(a''))\,,$$

и теорема доказана. □

В точности так же, но с использованием теоремы 8.2.1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 8.3.2 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$, $p \geq 1$. Предположим, что найдется (A', A'')–квазиизометрия $b : D \to \mathbb{R}^n$, являющаяся $W^{1,p}$-близкой к f с функцией $\delta(x) : D \to \mathbb{R}$ класса $L^p_{\rm loc}(D)$, $p \geq 1$, обладающей свойством (8.2.2) для всякой пары шаров $B(a, \tau) \subset B(a, r) \subset D$.*

Предположим также, что для любого шара $B(a, r) \subset D$ выполнено

$$r^{-n} \int\limits_{B(a,r)} \delta^p(x)\, d\mathcal{H}^n \leq q \tag{8.3.7}$$

с некоторой постоянной

$$q < \frac{(A')^p}{\nu_1^p(n,p)}\,. \tag{8.3.8}$$

(i) *Тогда* $D' = f(D)$ *есть область и для произвольной пары точек* a', $a'' \in D$ *выполнено*

$$(A' - q^{1/p})\,\rho_D(a',a'') \le \rho_{D'}(f(a'),f(a'')) \le (A'' + q^{1/p})\,\rho_D(a',a'')\,.$$

(ii) *Если область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *выпукла, то область* $D' = f(D)$ *квазивыпукла с постоянной* $Q = A'' + q^{1/p}$ *и для произвольной пары точек* a', $a'' \in D$ *справедливы оценки*

$$(A' - q^{1/p})\,|a''-a'| \le \rho_{D'}(f(a''),f(a')) \le (A'' + q^{1/p})\,|a''-a'|\,. \tag{8.3.9}$$

Следствие 8.3.1 *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^n$ *– область и пусть* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *– отображение класса* $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$. *Предположим, что отображение* f *является* $W^{1,p}$*-близким к тождественному отображению с функцией* $\delta(x) : D \to \mathbb{R}$ *класса* $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$, $p \ge 1$, *обладающей свойством* (8.2.2) *для всякой пары шаров* $B(a,\tau) \subset B(a,r) \subset D$.

Предположим также, что для любого шара $B(a,r) \subset D$ *выполнено* (8.3.7) *с некоторой постоянной* q, *подчиненной условию*

$$q < \frac{1}{\nu_1^p(n,p)}\,. \tag{8.3.10}$$

Тогда для произвольной пары точек a', $a'' \in D$ *выполнено*

$$\begin{aligned}(1 - q^{1/p}\nu_1(n,p))\,\rho_D(a',a'') \le \rho_{D'}(f(a'),f(a'')) \le \\ \le (1 + q^{1/p}\nu_1^p(n,p))\,\rho_D(a',a'')\,.\end{aligned} \tag{8.3.11}$$

Близкие по содержанию вопросы для квазиизометрических отображений двумерных поверхностей рассматривались в [86, раздел 4.2].

8.4 Приложения к неявным функциям

Укажем некоторые применения найденных результатов к проблеме существования неявных функций. Мы будем следовать схеме доказательства соответствующего утверждения в [244], где доказана некоторая его локальная версия. Другие негладкие варианты см. у Поршиу [226], Варги [245], [141], Журавлева и Игумнова [35].

Пусть $m, n \geq 1$ – целые и $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ – области. Пусть $F(x, y)$ – произвольная функция класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, где $D = U \times V$. Если (x, y) – точка, в которой существуют частные производные

$$\partial F/\partial x_i\,, \quad \partial F/\partial y_j \quad (i = 1, \ldots, n\,; j = 1, \ldots, m)\,,$$

то пусть $F'(x, y)$ – ее матрица Якоби, $F'_x(x, y)$ – матрица Якоби по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированных $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и $F'_y(x, y)$ – матрица Якоби относительно переменных y при фиксированных x.

Если $P \subset D$ – множество и $\varphi : P \to M_k$, $k \geq 1$, – произвольная матричная функция, то пусть

$$\operatorname{osc}(\varphi, P) = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi, \eta \in P} |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|$$

означает колебание (в существенном) функции φ на P.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.4.1 *Пусть $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, $y_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$ и пусть $F : D \to V$ – непрерывное отображение. Предположим, что выполняется одно из следующих требований.*

(i) Отображение $F \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и существует функция

$$\delta(x, y) : D \to \mathbb{R}\,,$$

удовлетворяющая условию (8.1.14) *(с $K = 1$ и $\lambda \geq m + n$) для всякого $(m + n)$-мерного шара $B(a, r) \subset D$ и такая, что*

$$|F'_x(x, y)|^2 + |F'_y(x, y) - E_m|^2 \leq \delta^{2/(m+n)}(x, y)\,. \tag{8.4.1}$$

При этом для любого $(m + n)$-мерного шара $B(a, r) \subset D$ имеет место

$$\frac{m + n}{|B(0, r)|} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x, y)\, d\mathcal{H}^{m+n} + \tag{8.4.2}$$

$$+\lambda\, r^{-(m+n)+(m+n)/K} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x,y)\, d\mathcal{H}^{m+n} \le q$$

с некоторой постоянной

$$q < \frac{1}{\nu^{m+n}(m+n,K)}\,. \tag{8.4.3}$$

(Величина ν определена выше в теореме 8.1.2.)

(*ii*) *Отображение $F \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду в D справедливо неравенство*

$$|F'_x(x,y)|^2 + |F'_y(x,y) - E_m|^2 \le \delta^{2/p}(x,y)$$

с функцией $\delta(x,y) : D \to \mathbb{R}$ класса $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$, $p \ge 1$, обладающей свойством (8.2.2) *для любой пары $(m+n)$-мерных шаров $B(a,\tau) \subset B(a,r) \subset D$. При этом, для любого $(m+n)$-мерного шара $B(a,r) \subset D$ выполнено*

$$r^{-n} \int\limits_{B(a,r)} \delta^p(x,y)\, d\mathcal{H}^{m+n} \le q \tag{8.4.4}$$

с некоторой постоянной

$$q < \frac{1}{\nu_1^p(m+n,p)}\,. \tag{8.4.5}$$

(*iii*) *Отображение $F \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ и*

$$\|F'_y - E_m\|_D + \mathrm{osc}\,(F'_x, D) < 1\,. \tag{8.4.6}$$

Тогда существует (единственное) непрерывное отображение

$$G(x) : U \to V\,, \quad G(x_0) = y_0\,,$$

такое, что

$$F(x, G(x)) = F(x_0, y_0) \quad \text{при всех} \quad x \in U\,.$$

При этом G удовлетворяет относительно внутренних метрик ρ_U и ρ_V условию Липшица глобально в U.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi : D \to \mathbb{R}^{n+m}$, определяемое как

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} (X, Y) = (x_1, \ldots, x_n, F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y)) .$$

Изучим сначала случай (i). Матрица Якоби отображения Φ имеет вид

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} E_n & O_m^n \\ F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \end{pmatrix},$$

где O_m^n есть нулевая $n \times m$-матрица.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi'(x, y) - E_{n+m} &= \begin{pmatrix} E_n & O_m^n \\ F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \end{pmatrix} - E_{n+m} = \\ &= \begin{pmatrix} O_n^n & O_m^n \\ F'_x(x, y) & F'_y(x, y) - E_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\det (\Phi'(x, y) - E_{n+m}) = 0 ,$$

$$|\Phi'(x, y) - E_{n+m}|^{m+n} = \left(|F'_x(x, y)|^2 + |F'_y(x, y) - E_m|^2\right)^{(m+n)/2} .$$

Предположение (8.4.1) влечет почти квазиконформную (с $K = 1$) близость отображения Φ к тождественному, и мы вправе применить теорему 8.3.1.

В силу (8.3.4), множество $D' = \Phi(D) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – область и для произвольной пары точек a', $a'' \in D$ выполнено

$$(1 - q^{1/(m+n)})\, \rho_D(a', a'') \le \rho_{D'}(f(a'), f(a'')) \le (1 + q^{1/(m+n)})\, \rho_D(a', a'') .$$

Отображение, обратное к отображению $\Phi(x, y)$ имеет вид

$$x = X, \quad y = \Theta(X, Y).$$

Более того, отображение Φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица в D' с постоянной

$$\mathrm{Lip}\,\left(\Phi^{-1},\, D'\right) \le 1/(1 - q^{1/n}) .$$

Для функции $\Theta(X,Y)$ имеем

$$\mathrm{Lip}\ (\Theta, D') \le \sqrt{1/(1-q^{1/(m+n)})^2 - 1}\,.$$

Далее заметим, что

$$(X,Y) = \Phi(\Phi^{-1}(X,Y)) = (X, F(X, \Theta(X,Y))).$$

Данное соотношение влечет

$$F(X, \Theta(X,Y)) = Y. \tag{8.4.7}$$

Обозначим через Π компоненту связности пересечения плоскости

$$Y_1 = F_1(x_0,y_0), \quad \ldots, \quad Y_m = F_m(x_0,y_0)$$

с областью D', содержащую точку $(X_0,Y_0) = (x_0, F(a))$. Коразмерность Π равна m. Пусть π – ортогональная проекция пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^n$. Для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ выполнено

$$\pi(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A\}.$$

В силу определения Φ, можно записать

$$\begin{aligned} \pi(\Phi(A')) \quad &= \Phi(\pi(A')) \quad \forall\ A' \subset D, \\ \pi(\Phi^{-1}(A'')) \ &= \Phi^{-1}(\pi(A'')) \quad \forall\ A'' \subset D'\,. \end{aligned}$$

Уравнение связного куска поверхности $\Phi^{-1}(\Pi)$, содержащего точку $a = (x_0,y_0)$ может быть переписано в непараметрической форме. Именно, пусть

$$(X,Y) = (x, \Theta(x,Y_0)), \quad x \in \Phi^{-1}(\pi(\Phi(D)))\,.$$

Положим $G(x) = \Theta(x,Y_0)$.

В силу (8.4.7), находим

$$F(x, G(x)) = Y_0 = F(x_0,y_0)\,,$$

где

$$G(x_0) = \Theta(x_0,Y_0) = \Theta(X_0,Y_0) = y_0\,.$$

Единственность отображения G следует из биективности $\Phi(x,y)$. Действительно, если $(x,y_1),(x,y_2) \in D$ и $F(x,y_1) = F(x,y_2)$, то $\Phi(x,y_1) = \Phi(x,y_2)$. Таким образом, $y_1 = y_2$.

В случае (ii) отображение Φ является $W^{1,p}$-близким к тождественному отображению $E_{m+n}(x,y) : D \to D$ и мы можем воспользоваться теоремой 8.3.2. Дальнейшие рассуждения в точности те же, что и в предыдущем случае.

Остановимся на случае (iii). Нам необходимо доказать, что $\Phi(x,y)$ удовлетворяет предположениям следствия 8.3.1. Рассмотрим $(n+m)\times(n+m)$-матрицу

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} E_n & O^n_m \\ -F'_x(x,y) & E_m \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\|Q(x_1,y_1) - Q(x_2,y_2)\|_D \le \|F'_x(x_1,y_1) - F'_x(x_2,y_2)\|_D \le \operatorname{osc}(F'_x, D).$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} Q(x,y)\Phi'(x,y) - E_{n+m} &= \begin{pmatrix} E_n & O^n_m \\ O^m_n & F'_y(x,y) \end{pmatrix} - E_{n+m} = \\ &= \begin{pmatrix} O^n_n & O^n_m \\ O^m_n & F'_y(x,y) - E_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\|Q(x,y)\Phi'(x,y) - E_{n+m}\|_D = \|F'_y(x,y) - E_m\|_D. \tag{8.4.8}$$

Для каждой фиксированной точки $(x^*,y^*) \in D$ определяем отображение

$$\Psi(x,y) = Q(x^*,y^*)\Phi(x,y) : D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{8.4.9}$$

С использованием (8.4.8) находим

$$\begin{aligned} &||\Psi'(x,y) - E_{n+m}||_D = \|Q(x^*,y^*)\Phi'(x,y) - E_{n+m}\|_D = \\ &= \|Q(x,y)\Phi'(x,y) - E_{n+m} + (Q(x^*,y^*) - Q(x,y))\Phi'(x,y)\|_D \le \\ &\le \|Q(x,y)\Phi'(x,y) - E_{n+m}\|_D + \\ &+ \|(Q(x^*,y^*) - Q(x,y))\,\Phi'(x,y)\|_D. \end{aligned}$$

Примем во внимание, что

$$\begin{aligned}
(Q(x^*,y^*)-Q(x,y))\,\Phi'(x,y) &= \begin{pmatrix} O^n_n & O^n_m \\ \\ F'_x(x,y)-F'_x(x^*,y^*) & O^m_m \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O^n_m \\ \\ F'_x(x,y) & F'_y(x, \ldots \\ \\ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O^n_n & O^n_m \\ \\ F'_x(x,y)-F'_x(x^*,y^*) & O^m_m \\ \\ \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\,(Q(x^*,y^*)-Q)\;\Phi'\|_D = \|F'_x - F'_x(x^*,y^*)\|_D \le \operatorname{osc}(F'_x, D)\,. \tag{8.4.10}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\Psi'(x,y)-E_{n+m} &= Q^*\,\Phi'(x,y)-E_{n+m} = \\
&= (Q(x^*,y^*)-Q(x,y))\;\Phi'(x,y)+ \\
&+Q(x,y)\,\Phi'(x,y)-E_{n+m}\,.
\end{aligned} \tag{8.4.11}$$

Тем самым, на основании (8.4.8), (8.4.10) и (8.4.11) получаем

$$\begin{aligned}
\|\Psi'(x,y)-E_{m+n}\|_D &\le \|Q(x,y)\Phi'(x,y)-E_{n+m}\|_D + \|(Q^*-Q)\Phi'\|_D \le \\
&\le \|F'_y - E_m\|_D + \operatorname{osc}(F'_x, D)\,.
\end{aligned}$$

В силу неравенства (8.4.6) мы можем заключить, что отображение

$$\Psi(x,y) = Q(x^*,y^*)\Phi(x,y)$$

гомеоморфно. На основании следствия **5.6.16** [177] из (8.4.6) выводим, что матрица $\Psi'(x,y)$ не вырождается. В свою очередь, сказанное влечет, что матрицы $\Phi'(x,y)$ и $Q \equiv Q(x^*,y^*)$ также не вырождаются. Тем самым, отображение $\Phi = Q^{-1}\Psi : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ также гомеоморфно.

Мы имеем

$$\begin{aligned}(1-\mu)\,\rho_D\left((x,y),(x_0,y_0)\right) &\le \rho_{\Phi(D)}\left(\Psi(x,y),\Psi(x_0,y_0)\right)\le \\ &\le (1+\mu)\,\rho_D\left((x,y),(x_0,y_0)\right)\,,\end{aligned}$$

где

$$\mu=\|F'_y-E_m\|_D+\operatorname{osc}\left(F'_x,D\right).$$

Таким образом, поскольку $\Psi=Q\Phi$, $Q=Q(x^*,y^*)$, мы вправе написать

$$\begin{aligned}\frac{1-\mu}{|Q|}\,\rho_U\left((x,y),(x_0,y_0)\right) &\le \rho_V\left(\Phi(x,y),\Phi(x_0,y_0)\right)\le \\ &\le (1+\mu)\,\rho_U\,|Q^{-1}|\,\left((x,y),(x_0,y_0)\right)\,.\end{aligned}\tag{8.4.12}$$

Однако,

$$\left(\begin{array}{cc} E_n & O_m^n \\ F'_x(x_0,y_0) & E_m\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} E_n & O_m^n \\ O_n^m & E_m\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} O_n^n & O_m^n \\ F'_x(x_0,y_0) & O_m^m\end{array}\right)$$

и, следовательно, $|Q|\le 1+\|F'_x\|_D$.

В силу (8.3.11) отображение Ψ^{-1} удовлетворяет условию Липшица в области $\Psi(D)$ с постоянной

$$\operatorname{Lip}\big(\Psi^{-1},\Psi(D)\big)\le\frac{1}{1-\mu}.$$

Отсюда, в силу (8.4.6), для каждой фиксированной точки (x^*,y^*) имеем

$$||\Psi'(x,y)-E_{m+n}||_D\le\mu<1.\tag{8.4.13}$$

Дальнейшие рассуждения в точности, как в случае (i). Вместо теоремы 8.3.1 достаточно воспользоваться следствием 8.3.1. Теорема 8.4.1 доказана. □

8.5 Вспомогательные оценки

8.5.1 Оценка интеграла Дирихле

Ниже нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 8.5.1 *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для произвольной точки $a \in D$ и почти всех $r \in (0, R)$, $R = \operatorname{dist}(a, \partial D)$, выполнено*

$$\left| \int\limits_{B(a,r)} \det f'(x)\, d\mathcal{H}^n \right| \leq \frac{r}{n} \int\limits_{S(a,r)} |f'(x)|^n\, d\mathcal{H}^{n-1}\,. \tag{8.5.1}$$

Доказательство см. [99, лемма 1.2 глава II]. $\square$

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$. Для произвольных $a \in D$ и $r \in (0, R]$, $R = \operatorname{dist}(a, \partial D)$, полагаем

$$I(a, r) = \int\limits_{B(a,r)} |f'(x)|^n\, d\mathcal{H}^n\,.$$

Имеет место

Лемма 8.5.2 *Если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, почти квазиконформное с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией $\delta(x)$, удовлетворяющей условию* (8.1.14), *то величина*

$$r^{-n/K}\, I(a, r) + \lambda \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n$$

не убывает на $(0, R]$.

Доказательство. Так как для почти всех $0 < r < R$ выполнено

$$I'(a, r) = \int\limits_{S(a,r)} |f'(x)|^n\, d\mathcal{H}^{n-1}\,,$$

то для почти всех $0 < r < R$ можно записать

$$\left(r^{-n/K}\, I(a,r) + \lambda \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n\right)' = -\frac{n}{K}\, r^{-1-n/K} I(a,r) +$$

$$+ r^{-n/K} I'(a,r) + \lambda\, J'(a,r) = -\frac{n}{K}\, r^{-1-n/K} I(a,r) +$$

$$+ r^{-n/K} \int\limits_{S(a,r)} |f'(x)|^n d\mathcal{H}^{n-1} + \lambda \int\limits_{S(a,r)} \delta(x)\, \mathcal{H}^{n-1}\,,$$

где

$$J(a,r) = \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n$$

Соотношение (8.5.1) гарантирует, что

$$\frac{r}{n} \int\limits_{S(a,r)} |f'(x)|^n d\mathcal{H}^{n-1} \geq \left| \int\limits_{B(a,r)} \det\, (f'(x))\; d\mathcal{H}^n \right|.$$

Поэтому в силу (8.1.1) находим

$$\frac{r}{n} \int\limits_{S(a,r)} |f'(x)|^n d\mathcal{H}^{n-1} \geq \frac{1}{K} \int\limits_{B(a,r)} |f'(x)|^n\, d\mathcal{H}^n - \frac{1}{K} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n\,.$$

Тем самым, будем иметь

$$\left(r^{-n/K}\, I(a,r) + \lambda \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n\right)' \geq -\frac{n}{K}\, r^{-1-n/K} I(a,r) +$$

$$+ \frac{n}{K}\, r^{-1-n/K} \int\limits_{B(a,r)} |f'(x)|^n\, d\mathcal{H}^n - \frac{n}{rK} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n + \lambda \int\limits_{S(a,r)} \delta(x)\, \mathcal{H}^{n-1}$$

и, далее, учитывая (8.1.14), получаем

$$\Big(r^{-n/K}\, I(a,r) + \lambda\, J(a,r)\Big)' \geq \lambda \int\limits_{S(a,r)} \delta(x)\,\mathcal{H}^{n-1} - \frac{n}{r\,K} \int\limits_{B(a,r)} \delta(x)\,\mathcal{H}^{n} \geq 0\,.$$

Лемма доказана. □

8.5.2 Специальный вариант леммы Морри

Ниже мы приводим утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 5.1.1, в которой лемма Морри формулируется для функций класса $W^{1,p}$ на римановых многообразиях.

Пусть a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^n$ и $d = |a_2 - a_1|$. Пусть $D = B(a_1, d) \cup B(a_2, d)$ – область.

Пусть $\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ означает семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset D$, соединяющих точки a_1 и a_2.

Лемма 8.5.3 *Пусть $\rho(x) \geq 0$ – произвольная функция класса $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$, $p \geq 1$.*

Если существуют постоянные $\alpha, c_1 > 0$ такие, что

$$\int\limits_{B(a_i,r)} \rho^p\, d\mathcal{H}^n \leq c_1\, r^{n-p+\alpha} \quad \textit{при всех} \quad r \in (0,d), \quad i = 1,2, \tag{8.5.2}$$

то

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,\,a_2)} \int\limits_{\gamma} \rho\, d\mathcal{H}^1 \leq c_2\, |a_1 - a_2|^{\alpha/p}\,. \tag{8.5.3}$$

При этом мы можем положить

$$c_2 = 2p\big(\omega_{n-1}/\, n\big)^{(p-1)/p}(\alpha + np - p)\, c_1^{1/p}\, /\, (\mu_n\alpha(np+\alpha)),$$

$$\omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S(0,1)).$$

8.6 Доказательства

Далее мы приводим доказательства сформулированных результатов.

8.6.1 Доказательство теоремы 8.1.2

Нашей ближайшей целью будет получение двусторонних оценок искажения при отображениях, почти квазиконформно близких к квазиизометриям.

Пусть $D = B(a_1, d) \cup B(a_2, d)$, как и выше, $b : D \to \mathbb{R}^n$ – некоторое (A', A'')-квазиизометрическоое отображение и $f : D \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса $W^{1,n}_{\text{loc}}(D)$, почти квазиконформно близкое к b с постоянной $K > 0$ и локально интегрируемой функцией δ, удовлетворяющей предположению (8.1.14).

Согласно лемме 8.5.2 для всякого $0 < r \le d = |a_2 - a_1|$ имеем

$$r^{-n/K}\, I(a_i, r) + \lambda \int\limits_{B(a_i,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n \le d^{-n/K}\, I(a_i, d) +$$

$$+\lambda \int\limits_{B(a_i,d)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n \quad (i = 1, 2)\,.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{B(a_i,d)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n - \int\limits_{B(a_i,r)} \delta(x)\, d\mathcal{H}^n \le \int\limits_{B(a_i,d)} \delta^+(x)\, d\mathcal{H}^n\,,$$

где обозначено

$$\delta^+(x) = \max\{0, \delta(x)\}\,.$$

Отсюда при каждом $i = 1, 2$ имеем

$$I(a_i, r) \le r^{n/K} \left(d^{-n/K} I(a_i, d) + \lambda \int\limits_{B(a_i,d)} \delta^+(x)\, d\mathcal{H}^n \right)\,. \tag{8.6.1}$$

Положим

$$J(a,r) = \int\limits_{B(a,r)} \delta^+(x)\, d\mathcal{H}^n \quad (0 < r \le d)\,.$$

Выберем в лемме 8.5.3 функцию $\rho = |f'(x) - b'(x)|$ и $p = n$. Согласно (8.6.1) предположение (8.5.2) имеет место с постоянными $\alpha = n/K$ и

$$c_1 = d^{-n/K} \max_{i=1,2} \Big(I(a_i,d) + \lambda d^{n/K}\, J(a_i,d) \Big)\;.$$

Соотношение (8.5.3) влечет

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,\,a_2)} \int\limits_{\gamma} |f'(x) - b'(x)|\, d\mathcal{H}^1 \le$$

$$\le \omega_{n-1}^{-1/n} \nu(n,K)\, \max_{i=1,2} \Big(I(a_i,d) + \lambda d^{n/K}\, J(a_i,d) \Big)^{1/n}\;.$$

Однако,

$$|(f(a_2) - b(a_2)) - (f(a_1) - b(a_1))| \le \inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,\,a_2)} \int\limits_{\gamma} |f'(x) - b'(x)|\, d\mathcal{H}^1$$

и потому

$$|(f(a_2) - f(a_1)) - (b(a_2) - b(a_1))| \le$$

$$\le \omega_{n-1}^{-1/n} \nu(n,K)\, \max_{i=1,2} \big(I(a_i,d) + \lambda d^{n/K}\, J(a_i,d) \big)^{1/n}\;. \tag{8.6.2}$$

Из соотношения (8.6.2) следует, что

$$|f(a_2) - f(a_1)| \le |b(a_2) - b(a_1)| +$$

$$+ \omega_{n-1}^{-1/n} \nu(n,K)\, \max_{i=1,2} \big(I(a_i,d) + \lambda d^{n/K}\, J(a_i,d) \big)^{1/n} \le$$

$$\le A''\, |a_2 - a_1| + \omega_{n-1}^{-1/n} \nu(n,K)\, \max_{i=1,2} \big(I(a_i,d) + \lambda\, d^{n/K}\, J(a_i,d) \big)^{1/n}\;.$$

Поэтому

$$|f(a_2) - f(a_1)| \le |a_2 - a_1| \, (A'' + \nu(n,K)\, h(a_1,a_2))\,. \tag{8.6.3}$$

Аналогично, если отображение f близко к билипшицеву отображению b, то

$$|b(a_2) - b(a_1)| - |(f(a_2) - f(a_1)) - (b(a_2) - b(a_1))| \le |f(a_2) - f(a_1)|$$

и

$$A'\,|a_2 - a_1| - \omega_{n-1}^{-1/n}\nu(n,K) \max_{i=1,2} \Big(I(a_i,d) + \lambda\, d^{n/K}\, J(a_i,r) \Big)^{1/n} \le$$

$$\le |f(a_2) - f(a_1)|\,.$$

Тогда

$$(A' - \nu(n,K)\, h(a_1,a_2))\, |a_2 - a_1| \, \le |f(a_2) - f(a_1)|\,. \tag{8.6.4}$$

Таким образом, объединяя (8.6.3) и (8.6.4), приходим к теореме 8.1.2. □

8.6.2 Доказательство следствия 8.1.2

Фиксируем произвольно пару точек a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^n$ и постоянную $\varepsilon > 0$. Условие (8.2.3) влечет существование (A', A'')-квазизометрии $b : D \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$h(a_1,a_2) \le \frac{A' + \varepsilon}{\nu(n,K)} \quad (i = 1,2)\,.$$

В силу теоремы 8.1.2, это гарантирует выполнение (8.1.16) и, далее, оценки

$$(A' + \varepsilon - \nu(n,K)h)\,|a_2 - a_1| \, \le |f(a_2) - f(a_1)| \le (A'' + \nu(n,K)h)\,|a_2 - a_1|\,.$$

Произвол в выборе $\varepsilon > 0$ позволяет заключить о справедливости двусторонних оценок (8.1.16) и о глобальной квазиизометричности отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. □

8.6.3 Доказательство предложения 8.1.1

Фиксируем произвольно постоянную $\varepsilon > 0$. Почти всюду в области D мы имеем
$$|f'(x)|^n \leq (1+\varepsilon)\,\|f'\|_D^n - \varepsilon\,\|f'\|_D^n\,.$$
Согласно неревенству Адамара для определителей, выполнено
$$|\det f'| \leq \prod_{k=1}^{n} |\nabla f_k|\,.$$
Применяя неравенство Коши
$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| \leq n^{-n}\,\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^n\,,$$
находим
$$|\det f'|^2 \leq n^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n} |\nabla f_k|^2\right)^n$$
или,
$$-n^{n/2}\det f'(x) \leq |f'(x)|^n \leq \|f'\|^n\,.$$
Отсюда получаем
$$|f'(x)|^n \leq (1+\varepsilon)\,\|f'\|_D^n + \varepsilon\, n^{n/2}\det f'(x)\,.$$
При $K = \varepsilon\, n^{n/2}$ имеем $\delta = (1+\varepsilon)\,\|f'\|_D^n \leq (1+\varepsilon)\,q^n$. $\square$

8.6.4 Доказательство теоремы 8.2.1

Пусть
$$I(a,r) = \int\limits_{B(a,r)} \delta^p(x)\,d\mathcal{H}^n \quad (0<r<d)\,.$$
Тогда, в силу предположения (8.2.2), имеем
$$I(a_i,r) \leq r^n d^{-n} I(a_i,d) \quad (i=1,2)\,. \tag{8.6.5}$$

Выберем в лемме 8.5.3 функцию $\rho = |f'(x) - b'(x)|$. Согласно (8.6.5) предположение (8.5.2) имеет место с постоянными $\alpha = p$ и

$$c_1 = d^{-n} \max_{i=1,2} I(a_i, d)\,.$$

Соотношение (8.5.3) влечет

$$\inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,\,a_2)} \int\limits_{\gamma} |f'(x) - b'(x)|\, d\mathcal{H}^1 \leq \omega_{n-1}^{-1/p} \nu_1(n,p)\, \max_{i=1,2} I^{1/p}(a_i, d)\,.$$

Однако,

$$|(f(a_2) - b(a_2)) - (f(a_1) - b(a_1))| \leq \inf_{\gamma\in\Gamma(a_1,\,a_2)} \int\limits_{\gamma} |f'(x) - b'(x)|\, d\mathcal{H}^1$$

и потому

$$\begin{aligned} &|(f(a_2) - f(a_1)) - (b(a_2) - b(a_1))| \leq \\ &\leq \omega_{n-1}^{-1/p} \nu(n,p)\, \max_{i=1,2} I^{1/p}(a_i, d)\,. \end{aligned} \tag{8.6.6}$$

Из соотношения (8.6.6) следует, что

$$\begin{aligned} |f(a_2) - f(a_1)| \; &\leq |b(a_2) - b(a_1)| + \\ &+ \omega_{n-1}^{-1/p} \nu_1(n,p)\, \max_{i=1,2} I^{1/p}(a_i, d) \leq \\ &\leq A''\, |a_2 - a_1| + \omega_{n-1}^{-1/p} \nu_1(n,p)\, \max_{i=1,2} I^{1/p}(a_i, d)\,. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|f(a_2) - f(a_1)| \leq |a_2 - a_1|\; (A'' + \nu_1(n,p)\, h(a_1, a_2))\,. \tag{8.6.7}$$

Аналогично, если отображение f близко к билипшицеву отображению b, то

$$|b(a_2) - b(a_1)| - |(f(a_2) - f(a_1)) - (b(a_2) - b(a_1))| \leq |f(a_2) - f(a_1)|$$

и

$$A' |a_2 - a_1| - \omega_{n-1}^{-1/p} \nu_1(n,p) \max_{i=1,2} I^{1/p}(a_i, d) \leq |f(a_2) - f(a_1)| \,.$$

Тогда

$$(A' - \nu_1(n,p)\, h_1(a_1, a_2))\ |a_2 - a_1|\ \leq |f(a_2) - f(a_1)| \,. \tag{8.6.8}$$

Таким образом, объединяя (8.6.7) и (8.6.8), приходим к теореме 8.2.1. □

8.7 Связь с почти-решениями

Устанавливаются связи между отображениями класса $W^{1,n}_{\rm loc}$, почти квазиконформными в смысле Кэллендера, и почти-решениями квазилинейных уравнений с частными производными эллиптического типа. Ниже при изложении мы следуем [85].

8.7.1 Основная теорема

Пусть $A(x,\xi):D\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x\in D$ отображение $\xi\in\mathbb{R}^n\to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x\in D\to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x\in D$ и всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$|A(x,\xi)|^{n/(n-1)}\le\mu\,\langle\xi,A(x,\xi)\rangle\,, \tag{8.7.1}$$

где $\mu>0$ – некоторая постоянная.

Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $z(x)\in W^{1,n}_{\rm loc}(U)$ – некоторая функция. Будем говорить, что $z(x)$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}_+(\mu;U)$, если найдутся постоянная $\mu>0$ и вектор-функция

$$\omega(x)=(\omega_1(x),\ldots,\omega_n(x))\in L^{\frac{n}{n-1}}_{\rm loc}(U)\,,$$

обладающая свойствами:

$\alpha)$ для произвольной неотрицательной функции

$$\varphi\in W^{1,n}(U)\,,\quad {\rm supp}\,\varphi\subset U\,,$$

выполнено

$$\int\limits_U\sum_{i=1}^n\varphi'_{x_i}(x)\,\omega_i(x)\,dx\le 0\,; \tag{8.7.2}$$

$\beta)$ почти всюду на U справедливо неравенство

$$|\omega|^{n/(n-1)}(x)\le\mu\,\langle\nabla z(x),\,\omega(x)\rangle\,. \tag{8.7.3}$$

Будем говорить, что $z(x) \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(\mu; U)$, если найдутся постоянная $\mu > 0$ и вектор-функция

$$\omega(x) = \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \in L^{\frac{n}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(U)$$

такие, что выполняется неравенство (8.7.3), а неравенство (8.7.2) имеет место при любой функции $\varphi \in W^{1,n}(U)$.

Наши дальнейшие построения будут базироваться на следующем элементарном наблюдении.

Лемма 8.7.1 *Множество функций $z(x) : U \to \mathbb{R}$ класса $\mathcal{F}(\mu; U)$ (класса $\mathcal{F}_+(\mu; U)$) совпадает с множеством решений всевозможных уравнений* (3.2.4) *(с множеством субрешений всевозможных уравнений* (3.2.4) *).*

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – почти квазиконформное отображение, осуществляемое вектор-функцией $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Введем обозначение $z_f(x) = \ln |f(x)|$.

В качестве области определения функции $z_f(x)$ мы будем полагать открытое множество $U_f = D \setminus E_f$, где

$$E_f = \{x \in D : |f(x)| = 0\}.$$

Основной результат здесь доставляет следующее утверждение.

Теорема 8.7.1 *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – почти квазиконформное отображение с постоянной $K > 0$ и функцией $\sigma(x) \in L^1(D)$. Предположим, что существует вектор-функция $\Pi : U_f \to \mathbb{R}^n$, $\Pi \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(U_f)$, $q = n/(n-1)$, такая, что почти всюду на U_f выполнено*

$$|\Pi(x)|^{n/(n-1)} \le c(n)\, \sigma(x)\, |f(x)|^{-n} + c(n)\, K\, \langle \Pi(x), \nabla z_f \rangle . \tag{8.7.4}$$

Тогда функция $z_f : U_f \to \mathbb{R}$ является почти-решением некоторого уравнения вида (3.2.4)*, удовлетворяющего предположениям* (i) – (iii) *с постоянной $\mu = 2^{1/(n-1)}\, K\, c(n)$ и уклонением*

$$\varepsilon = \int\limits_D |\operatorname{div} \Pi(x)|\, dx .$$

Здесь

$$c(n) = n^{\frac{3n}{4(n-1)}}\,(n-1)^{-n/4}\,.$$

8.7.2 Доказательство теоремы 8.7.1

Рассмотрим дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\Omega(y,dy) = |y|^{-n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}y_i\,dy_1\wedge\ldots\widehat{dy_i}\ldots\wedge dy_n\,,$$

где знак $\widehat{\ }$ над выражением означает, что оно опускается.

Легко проверяется, что данная форма замкнута. Именно, мы имеем

$$d\Omega(y,dy) = -n\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\,dy_i\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}y_i\,dy_1\wedge\ldots\widehat{dy_i}\ldots\wedge dy_n\right)$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}\,dy_i\wedge\,dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_n =$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(-n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}y_i^2\,dy_i\wedge\,dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_n+\right.$$

$$\left.+\,n(-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\left(-n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}y_i^2\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_i\wedge\ldots\wedge dy_n+\right.$$

$$\left.+\,n(-1)^{n+1}(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n\right)=0\,.$$

Поскольку производные функции z_f имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} z_f = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

и, согласно определению, отображение f непрерывно, то z_f есть функция класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(U_f)$.

Индуцированная $(n-1)$-форма $\Omega^* = \Omega(f(x), df(x))$ имеет коэффициенты класса $L^n_{\mathrm{loc}}(U_f)$. Покажем, что Ω^* является слабо замкнутой [155] в том смысле, что для произвольной n-формы β с компактным носителем $\operatorname{supp} \beta \subset U_f$ и коэффициентом класса $W^{1,n/(n-1)}(U_f)$ выполнено (3.2.8), т.е.

$$\int\limits_{U_f} \left\langle \Omega^*, (-1)^{n-1} *^{-1} d{*}\,\beta \right\rangle dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0\,.$$

Ясно, что в качестве n-форм β достаточно брать C^2-формы с компактными носителями. Аппроксимируем вектор-функцию $f : U_f \to \mathbb{R}^n$ последовательностью C^2-гладких вектор-функций $f^k : U_f \to \mathbb{R}^n$, сходящейся по $W^{1,n}$-норме на подобласти U' с компактным замыканием $\overline{U'} \subset U_f$, $\operatorname{supp} \beta \subset U'$ (см., например, [53]).

Пусть $\Omega^*_k = \Omega(f^k(x), d\, f^k(x))$. Мы имеем

$$\int\limits_{U_f} d\Omega^*_k \wedge *\beta = \int\limits_{U_f} d(\Omega^*_k \wedge *\beta) + (-1)^n \int\limits_{U_f} \theta^*_k \wedge d * \beta\,.$$

Так как форма β имеет компактный носитель, то по формуле Остроградского – Гаусса первый из интегралов в правой части обращается в нуль.

Отсюда,

$$\int\limits_{U_f} d\Omega_k^* \wedge *\beta = (-1)^n \int\limits_{U_f} \Omega_k^* \wedge * *^{-1} d * \beta =$$

$$= -\int\limits_{U_f} \Omega_k^* \wedge *(-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta =$$

$$= -\int\limits_{U_f} \langle \Omega_k^*, (-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta \rangle \, dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Так как $d\big(\Omega(f^k, df_k)\big) = \big(d\Omega\big)(f^k, df_k)$, то замкнута и каждая из форм Ω_k^*. Это влечет справедливость соотношения (3.2.8) при всяком $k = 1, 2, \ldots$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь сходимостью $f_k \to f$ по $W^{1,n}$-норме, заключаем о справедливости (3.2.8) для вектор-функции f и произвольной n-формы β. Тем самым, слабая замкнутость формы Ω^* доказана.

Рассмотрим вектор-функцию $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где

$$\omega_m = \frac{(-1)^{m+1}}{|f|^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \, \Delta_{im} \, , \quad m = 1, \ldots, n \, .$$

Ортогональное дополнение к дифференциальной форме $\sum_{m=1}^{n} \omega_m \, dx_m$ степени 1 имеет вид

$$* \sum_{m=1}^{n} \omega_m \, dx_m = |f|^{n-1} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} f_m \, df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_m} \wedge \ldots \wedge df_m = \Omega^* \, .$$

При этом, как показано выше,

$$d * \sum_{m=1}^{n} \omega_m \, dx_m = \operatorname{div} \omega \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0 \, .$$

В соответствии с леммой 8.7.1, существует вектор-функция A такая, что

$$A(x, \nabla z_f(x)) = \omega(x) + \Pi(x) \, .$$

Функция z_f удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}\,(A(x,\nabla z_f(x)) - \Pi(x)) = 0$. Для произвольной неотрицательной функции φ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ и свойствами

$$\varphi(x) \in C^1(D)\,, \quad 0 \le \varphi(x) \le 1$$

выполнено

$$\left|\int\limits_{U_f} \langle A(x,\nabla z_f), \nabla\varphi\rangle\,dx\right| \le \left|\int\limits_{U_f} \langle \omega, \nabla\varphi\rangle\,dx + \int\limits_{U_f} \langle \Pi, \nabla\varphi\rangle\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{U_f} \langle \varphi, \nabla\Pi\rangle\,dx\right| \le \int\limits_{U_f} |\operatorname{div}\Pi|\;dx < \varepsilon\,.$$

Таким образом, функция $z = z_f$ является почти-решением уравнения $\operatorname{div} A(x,z) = 0$.

Нам осталось доказать, что имеет место соотношение (8.7.3) и, тем самым, (3.2.1). Заметим сначала, что

$$\langle \Omega^*, \nabla z_f\rangle = |f|^{-(n+2)} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+n} f_i f_j \langle df_i, *(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots df_n)\rangle =$$

$$= |f|^{-n} J(x,f)$$

и, далее,

$$\begin{aligned}\langle A, \nabla z_f\rangle &= \langle \Omega^*, \nabla z_f\rangle + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle = \\ &= |f|^{-n} J(x,f) + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle \ge \\ &\ge \frac{1}{K}\,|f|^{-n}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} |\nabla f_i|^2\right]^{n/2} - \sigma(x)\right) + \langle \Pi, \nabla z_f\rangle\,.\end{aligned}$$

Тем самым, почти всюду на U_f выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |f|^{-n}\left[\sum_{i=1}^{n}|\nabla f_i|^2\right]^{n/2} & +K\left\langle \Pi, \nabla z_f\right\rangle - \sigma(x)|f|^{-n} \le \\ & \le K\left\langle A, \nabla z_f\right\rangle . \end{aligned} \tag{8.7.5}$$

Таким образом, мы имеем

$$|A(x, \nabla z_f)| \le |\Omega^*| + |\Pi| .$$

Величина

$$\left(\frac{|\Omega^*|^t}{2} + \frac{|\Pi|^t}{2}\right)^{1/t}$$

является неубывающей функцией переменной $t \in (-\infty, +\infty)$ (см., например, [12, стр. 30]). Поэтому при любом $n > 1$ выполнено

$$\frac{|\Omega|^*}{2} + \frac{|\Pi|}{2} \le \left(\frac{|\Omega^*|^{n/(n-1)}}{2} + \frac{|\Pi|^{n/(n-1)}}{2}\right)^{(n-1)/n}$$

и, следовательно,

$$|A(x, \nabla z_f)|^{n/(n-1)} \le 2^{1/(n-1)}\left(|\Omega^*|^{n/(n-1)} + |\Pi|^{n/(n-1)}\right) . \tag{8.7.6}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |\Omega^*|^{n/(n-1)} & = \Omega(f(x), df(x)) = \\ & = |f|^{-n^2/(n-1)}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} f_i\, df_1 \wedge \ldots \widehat{df_i} \ldots \wedge df_n\right|^{n/(n-1)} \le \\ & \le c(n)\,|f|^{-n}\left[\sum_{i=1}^{n}|\nabla f_i|^2\right]^{n/2} , \end{aligned} \tag{8.7.7}$$

где $c(n)$ – некоторая постоянная, которая будет указана ниже.

Поэтому, объединяя (8.7.5) и (8.7.6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}|A(x,\nabla z_f)|^{n/(n-1)} \ &\le\ 2^{1/(n-1)}c(n)\,|f|^{-n}\left[\sum_{i=1}^{n}|\nabla f_i|^2\right]^{n/2}+\\ &+2^{1/(n-1)}\,|\Pi|^{n/(n-1)}\le 2^{1/(n-1)}\,|\Pi|^{n/(n-1)}+\\ &+2^{1/(n-1)}\,c(n)\,\left(K\langle A,z_f\rangle - K\left\langle \Pi,\nabla z_f\right\rangle-\sigma(x)\,|f|^{-n}\right)\,.\end{aligned}$$

Предположение (8.7.4) влечет теперь, что

$$|A(x,\nabla z_f)|^{n/(n-1)}\le 2^{1/(n-1)}\,K\,c(n)\,\langle A,\nabla z_f\rangle$$

и требование (3.2.1) на символ A действительно выполнено.

Для доказательства теоремы нам осталось оценить постоянную $c(n)$. Мы имеем

$$\Omega^*=(\Omega_1,\ldots,\Omega_n)\ ,$$

где

$$\Omega_m=\frac{(-1)^{m+1}}{|f|^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i\,\Delta_{im}$$

и

$$\Delta_{im}=\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,\widehat{f_i},\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)}\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|\Omega^*| \ &\le |f|^{-n} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n (-1)^{i-1} f_i \, \Delta_{im}\right)^2\right]^{1/2} \le \\
&\le |f|^{-n} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n |f_i|^2\right) \left(\sum_{m=1}^n \Delta_{im}^2\right)\right]^{1/2} \le \\
&\le |f|^{-n} \left[n \sum_{i=1}^n f_i^2 \left(\sum_{m=1}^n \Delta_{im}^2\right)\right]^{1/2} \le \\
&\le |f|^{-n} \left[n \sum_{i=1}^n f_i^4 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \Delta_{im}^2\right)^2\right]^{1/4} .
\end{aligned}$$

Однако, при $\alpha \ge 2$ выполняется [12, стр. 32]

$$(a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)^{1/\alpha} \le \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n |f_i|^4 \le \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^2 \le |f|^4 .$$

Тем самым, мы получаем

$$|\Omega^*| \le n^{1/4} |f|^{-n+1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \Delta_{im}^2\right)^2\right]^{1/4} . \tag{8.7.8}$$

В силу неравенства Адамара для определителей и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$|\Delta_{im}|^2 \le \prod_{\substack{p=1 \\ p\ne i}}^n \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q\ne m}}^n f'^2_{px_q}\right) \le \left(\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p=1 \\ p\ne i}}^n \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q\ne m}}^n f'^2_{px_q}\right)\right)^{n-1}$$

или,

$$|\Delta_{im}|^2 \leq (n-1)^{1-n} \left[\sum_{p=1}^{n} |\nabla f_p|^2\right]^{n-1} .$$

Тем самым, на основании (8.7.8) находим

$$|\Omega^*| \leq n^{3/4}(n-1)^{(1-n)/4} \, |f|^{-n+1} \left[\sum_{p=1}^{n} |\nabla f_p|^2\right]^{(n-1)/2} . \tag{8.7.9}$$

Неравенство (8.7.9) влечет выполнение соотношения (8.7.7) с постоянной $c(n)$. □

Литература

[1] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М.: Мир, 1969.

[2] Ф.Г. Авхадиев, Конформные отображения и краевые задачи, Казанский фонд 'Математика', 1996.

[3] Ф.Г. Авхадиев, Решение обобщенной задачи Сен-Венана, Матем. сб., т. 189, n. 12, 1998, 3-12.

[4] Ф.Г. Авхадиев, О многомерных неравенствах типа Харди, Геометрический анализ и его приложения, Тез. докл. междун. школы-конф., г. Волгоград, 24-30 мая 2004 г., 6-8.

[5] В.В. Асеев, Д.Г. Кузин, Достаточные условия квазисимметричности отображений прямой и плоскости, Сиб. матем. журн., т. 39, n. 6, 1998, 1225-1235.

[6] В.В. Асеев, Д.Г. Кузин, Континуумы с ограниченным искривлением: условия цепей и инфинитезимальной связности, Сиб. матем. журн., т. 41, n. 5, 2000, 984-996.

[7] В.В. Асеев, А.В. Сычев, О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений, Сиб. мат. журн., т. 15, n. 6, 1974, 1213-1227.

[8] Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко, Модель релятивистской струны в физике адронов, М.: Энергоатомиздат, 1987.

[9] П.П. Белинский, Общие свойства квазиконформных отображений, Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1974.

[10] С.Н. Бернштейн, Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа, Собрание сочинений, т. III, М.: изд-во Акад. Наук СССР, 1960, 251-258.

[11] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, М., 1975.

[12] Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, М: Мир, 1965; E. Bekkenbah and R.O. Bellman, Inequalities, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N.F., Bd. 30 Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

[13] R.L. Bishop, R.J. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic Press, New York and London, 1964; Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, Мир, М., 1967.

[14] Э. Бомбьери, Э. Де Джорджи, Э. Джусти, Минимальные конусы и проблема Бернштейна, сб. переводов 'Математика', т. 15, n. 2, 1971, 84-108.

[15] Ю.Е. Боровский, Вполне интегрируемые системы Пфаффа, Известия вузов. Математика, 2, 1959, 28-40.

[16] Ю.Е. Боровский, Системы Пфаффа с коэффициентами из L^p и их геометрические приложения, Сибирск. матем. журн., т. 29, n. 2, 1988, 10-16.

[17] В.А. Ботвинник, Теоремы Фрагмена-Линделефа для пространственных отображений с ограниченным искажением, 1983, – Диссертация, – Волгоград, 1-96.

[18] С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн, Критерий устранимости множеств для пространств W_p^1, квазиконформных и квазиизометрических отображений, Сиб. мат. журн., т. 18, n. 1, 1977, 48-68.

[19] Л. Бринк, М. Энно, Принципы теории струн, М.: Мир, 1991.

[20] Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер, Геометрические неравенства, Ленинград: Наука, 1980.

[21] И.Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М.: ФМ, 1959.

[22] Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М.: ГИФМЛ, 1960; H. Wittich, Neuere untersuchungen über eindeutige analytische funktionen, Springer - Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1955.

[23] М. Вуоринен, О. Мартио и В.М. Миклюков, К геометрической структуре квазиплоскостей, Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета, Изд-во Волгоградского гос. ун-та, 2002, с. 21-31.

[24] Э. Джусти, Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации, М.: Мир, 1989.

[25] Е.П. Долженко, О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов, Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 28, n. 5, 1964, 1113-1130.

[26] Е.П. Долженко, Об особых точках непрерывных гармонических функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 28, n. 6, 1964, 1251-1270.

[27] А.П. Девятков, В.И. Кругликов, О стирании особенностей последовательностей аналитических функций, Докл. РАН, т. 406, n. 5, 2006, 591-592.

[28] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, Современная геометрия, М.: Наука, 1979.

[29] А. Картан, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, М.: Мир, 1971; H. Cartan, Calcul différentiel. Formes différentielles, - Collection méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[30] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, М.: Наука, 1967.

[31] А.А. Гольдберг, И.В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М: Наука, 1970.

[32] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, М.: Наука, 1983.

[33] А.А. Григорьян, Об одной лиувиллевой теореме на римановом многообразии, Усп. матем. наук, т. 37, n. 3, 1982,181-182.

[34] М. Гусман, Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$, М.: Мир, 1978.

[35] И.В. Журавлев, А.Ю. Игумнов, О неявнях функциях, Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2002, 41-46.

[36] В.А. Зорич, Теорема Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства, Мат. сб., т. 74, n. 3, 1967, 417-432.

[37] Б.Ж. Ищанов, Об устранимых особенностях функций классов BMO и их обобщений, Вестник Московск. университета, Сер. 1, Матем. Мех., вып. 5, 1985, 77-80.

[38] Б.Ж. Ищанов, Незамкнутые особые множества для слабых решений линейных дифференциальных уравнений, Геометрические вопросы теории функций и множеств, 1989, Калинин: Калининский гос. университет, 41-49.

[39] И.Е. Капорин, Метод продолжения по длине дуги для нелинейных уравнений с параметром, Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления, Труды Всероссийской конференции ВЦ им. А.А. Дородницыеа РАН, 2006, 71-75.

[40] А.П. Кармазин, Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей, Сургут: изд-во СурГУ, 2003.

[41] В.М. Кесельман, О римановых многообразиях $p-$параболического типа, Известия вуз. Математика, n. 4, 1984, 81-83.

[42] В.М. Кесельман, Точные оценки p-емкости конденсатора на римановом многообразии, Геометрический анализ и его приложения, Труды международной школы - конференции, г. Волгоград, 24 - 30 мая 2004, Волгоград: изд-во Волгоградского государственного ун-та, 2005, 75-103.

[43] В.М. Кесельман, В.М. Миклюков, О поведении "в целом" неограниченных гиперповерхностей с квазиконформным гауссовым отображением, Сиб. матем. ж., т. 25, n. 6, 1984, 195.

[44] А.А. Клячин, В.М. Миклюков, Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении при ограничениях на градиент, Мат. сб., т. 183, n. 7, 1992, 49-64.

[45] А.А. Клячин, В.М. Миклюков, Изотропные гиперповерхности и минимальные продолжения липшицевых функций, Функц. анализ и прил., т. 39., вып. 3, 2005, 28-36.

[46] В.А. Клячин, В.М. Миклюков, Трубки и ленты в пространстве-времени, Волгоград, изд-во ВолГУ, 2004.

[47] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, т. I, т. II, Наука, М., 1981; S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, v. I, v. II, Interscience, New York, 1963.

[48] А.Н. Кондрашов, О проблеме конформного типа подмногообразий псевдоевклидова пространства, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ. - матем. наук, Волгоград, Волгоградский гос. ун-т, 2000.

[49] А.Н. Кондрашов, Об одном признаке параболичности римановой метрики на плоскости, Вестник ВолГУ, сер. 1: Математика. Физика. вып. 4, 1999, 13-19.

[50] А.Н. Кондрашов, Двумерные поверхности нулевой средней кривизны в псевдоевклидовом пространстве, В сб. Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложенния, Волгоград: Изд-во Волгоградского государственного университета, 1999, 244-268.

[51] А.Н. Кондрашов, Системы уравнений типа нулевой средней кривизны, готовится к печ.

[52] А.П. Копылов, Об аппроксимации пространственных квазиконформных отображений, близких к конформным, гладкими квазиконформными отображениями, Сибирск. матем. журн., т. XIII, n. 1, 1973, 94-106.

[53] А.П. Копылов, Интегральные усреднения и квазиконформные отображения, ДАН СССР, т. 231, n. 2, 1976, 289-291.

[54] А.П. Копылов, Об устранимости шара для пространственных отображений, близких к конформным, Докл. АН СССР, т. 234, n. 3, 1977, 525-527.

[55] А.П. Копылов, О граничных значениях отображений, близких к изометрическим, Сиб. мат. ж., т. XXV, 1984, 120-131.

[56] А.П. Копылов, Устойчивость в C-норме классов отображений, Новосибирск: Наука, 1990.

[57] С.Л. Крушкаль, Квазиконформные зеркала, Сиб. матем. ж., т. 40, n. 4, 1999, 880-892.

[58] М.А. Лаврентьев, Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей, Докл. АН СССР, т. 20, 1938, 241-242.

[59] М.А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М.: изд-во АН СССР, 1962.

[60] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, М.: Наука, 1973.

[61] Е.М. Ландис, Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, Наука, М., 1971.

[62] Т.Г. Латфуллин, Лемма Морри в (ε, δ)-областях Джонса, Тюменский гос. ун-т, Тюмень, 1991, Деп. ВИНИТИ 14.03.91, N 1130 -B91, 12 с.

[63] В.И. Левин, О неравенствах 2. Об одном классе интегральных неравенств, Матем. сб., v. 4 (46), 1938, 309-324.

[64] А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономий, М.: ИЛ, 1960.

[65] В.Г. Мазья, Пространства С.Л. Соболева, Ленинград, изд-во Ленинградского ун-та, 1985.

[66] Е.В. Малинникова, Равномерная аппроксимация гармоническими дифференциальными формами на компактных подмножествах риманового многообразия, Алгебра и Анализ, т. 11, n. 4, 1999, 115–138.

[67] Е.В. Малинникова, В.П. Хавин, Равномерная аппроксимация гармоническими формами. Конструктивный подход, Алгебра и Анализ, т. 9, n. 6, 1997, 156–196.

[68] О. Мартио, В. Миклюков, М. Вуоринен, Принцип Фрагмена-Линделефа для квазирегулярных отображений многообразий и изопериметрия, Докл. АН России, т. 347, n. 3, 1996, 303-305.

[69] В.М. Миклюков, Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве, Докл. Акад. Наук СССР, т. 188 n. 3, 1969, 525–527.

[70] В.М. Миклюков, О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в R^n, Докл. АН СССР, т. 247, n. 3, 1979, 549-552.

[71] В.М. Миклюков, Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности, Матем. сб., т. 108, n. 2, 1979, 268-289.

[72] В.М. Миклюков, Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением, Матем. сб., т. 111, 1980, 42-66.

[73] В.М. Миклюков, Обобщенная теорема Вимана для пространственных отображений с ограниченным искажением, В сб. 'Материалы первой научн. конф. Волгоградск. ун - та', 1984, Деп. ВИНИТИ, n. 3254-84.

[74] В.М. Миклюков, Минимальные ленты типа геликоида, IX-я Всесоюзн. геом. конферен., Кишинев, 1988, 213.

[75] В.М. Миклюков, О конформном типе концов максимальных пространственноподобных поверхностей с особенностями, Актуальные вопросы комплексного анализа, Тезисы докл. школы-семинара. Ташкент, 1989, 79.

[76] В.М. Миклюков, Асимптотические тракты субгармонических функций на многообразии и внешнее строение минимальных поверхностей, Тезисы докл. Всесоюзн. конф. по геометрии и анализу, Новосибирск, 1989, 54.

[77] В.М. Миклюков, О критических точках решений уравнений типа максимальных поверхностей в пространстве Минковского, Теория отображений и приближения функций, Киев: Наукова Думка, 1989, 112–125.

[78] В.М. Миклюков, Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей, Известия АН России. Сер. матем. т. 60, n. 4, 1996, 111-158.

[79] В.М. Миклюков, Множества особенностей решений уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского, Сиб. матем. ж., т. 131, n. 6, 1992, 131-140.

[80] В.М. Миклюков, О квазиконформно плоских поверхностях в римановых многообразиях, Изв. РАН (сер. матем.), т. 67, n. 5, 2003, 83-106.

[81] В.М. Миклюков, Решения с особенностями как почти-решения, ДАН России, т. 410, n. 6, 2006, 1-3.

[82] В.М. Миклюков, $\mathcal{A}$-решения с особенностями как почти-решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31-50.

[83] В.М. Миклюков, Зоны стагнации гармонической функции на поверхности и предлиувиллевы теоремы, Геометрический анализ и его приложения, Тез. докл. междунар. школы-конференции, Май 2004, Волгоград: изд-во ВолГУ, 131-132.

[84] В.М. Миклюков, Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения, Волгоград, изд-во ВолГУ, 2005; то же на англ. яз.: Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications. Exlibris Corporation, Philadelphia, 2008, 268 pp..

[85] В.М. Миклюков, Почти квазиконформные отображения как почти решения, в сб. Математический и прикладной анализ, вып. 3, изд-во Тюменск. гос. ун-та., 2007, 59-70.

[86] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006, 284 стр.

[87] В.М. Миклюков, Стекловские средние почти квазиконформных отображений (готов. к печати).

[88] В.М. Миклюков, В.Г. Ткачев, О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^n$, Известия вузов, Математика, n. 7, 1987, 30–36.

[89] В.М. Миклюков, В.Г. Ткачев, Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности, Мат. сб., т. 180, n. 9, 1989, 1278–1295.

[90] В.Н. Монахов, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосибирск: Наука, 1977.

[91] Р. Неванлинна, Униформизация, М.: ИЛ, 1955; R. Nevanlinna, Uniformisierung, Berlin, 1953.

[92] И.С.С. Ниче, О новых результатах в теории минимальных поверхностей, сб. переводов "Математика", II, n. 3, 1967, 37 – 100; J.C.C. Nitsche, On new results in the theory of minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc., v. 71, n. 2, 1965, 195–270.

[93] Р. Оссерман, Минимальные поверхности, Успехи мат. наук, т. 22, вып. 4, 1967, 55–136.

[94] И.Н. Песин, Множества устранимых особенностей аналитических функций и квазиконформные отображения, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М.: ФМ, 1960, 419-424.

[95] А.В. Покровский, Локальные аппроксимации решениями гипоэллиптических уравнений и устранимые особенности, Докл. РАН, т. 367, n. 1, 1999, 15-17.

[96] Г. Полиа, Г. Сеге, Изопериметрические неравенства в математической физике, М.: Физматгиз, 1962; G. Pólya, G. Szegö, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. - Annals of Mathematics Studies, no. 27, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[97] Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, М.: ИЛ, 1956.

[98] Ю.Г. Решетняк, Лекции по математическому анализу, Изд-во. Новосиб. ун-та, Новосибирск, 1972.

[99] Ю.Г. Решетняк, Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука, 1982.

[100] Ю.Г. Решетняк, Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосибирск: Наука, 1982.

[101] Р. Рокафеллер, Выпуклый анализ, Мир, М.: 1973.

[102] Л. Саймон, Уравнение минимальных поверхностей, в сб. 'Минимальные поверхности', М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 307-343.

[103] J. Simons, Minimal varieties in Riemanian manifolds, Ann. Math., v. 88, n. 1, 1968, 62–105; русский перевод в сб. "Целочисленные потоки и минимальные поверхности" , 132-197, М.: Мир, 1973.

[104] Справочник по специальным функциям, Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган, М.: Наука, 1979.

[105] С.Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград: изд-во Ленингр. ун-та, 1955; Applications of functional analysis in mathematical physics, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1963.

[106] И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир, 1973.

[107] Г.Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, СО АН СССР, Новосибирск, 1965.

[108] Г.Д. Суворов, Обобщенный "принцип длины и площади"в теории отображений, Киев: Наукова думка, 1985.

[109] А.В. Сычев, Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосибирск: Наука, 1983.

[110] И. Тамура, Топология слоений, М.: Мир, 1979; I. Tamura, Topology of foliations, Iwanami Shoten, Japan, 1976.

[111] В.Г. Ткачев, Минимальные трубки конечной интегральной кривизны, Сиб. матем. ж., т. 39, n. 1, 1998, 181-190.

[112] А.Т. Фоменко, Алгебраическиая структура некоторых классов вполне интегрируемых систем на алгебрах Ли, Геом. теория функц. и тополог., Киев: Наукова Думка, 1981, 85–126.

[113] А.Т. Фоменко, О скорости роста и наименьших объемах глобально минимальных поверхностей в кобордизмах, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, вып. 21, М.: МГУ, 1983. 3–12.

[114] Г.Г. Харди, Д.Е. Литлвульд, Г. Полиа, Неравенства, М.: ИЛ, 1948.

[115] У. Хейман, П. Кеннеди, Субгармонические функции, М.: Мир, 1980; Subharmonic functions I, Academic Press: London - New York - San Francisco, 1976.

[116] Ю.В. Шеретов, Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений, Тверь: Твер. гос. ун-т, 2000.

[117] L.V. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sci. Fenn., N.S., A 1, 1-40, 1930.

[118] L.V. Ahlfors, Zur theorie Überlagerungsflächen, Acta Math., v. 65, 1935, 157-194.

[119] L. Ahlfors, A. Beurling, Conformal invariants and function theoretic null sets, Acta Math., v. 83, 1950, 101-129.

[120] G. Alessandrini and V. Nesi, Univalent σ-harmonic mappings, Arch. Ration. Mech. and Anal., v. 158, 2001, 155-171.

[121] G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy, and M.K. Vuorinen, Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps, Canadian Math. Soc., Ser. of Monographs and Advanced texts, A Wiley - Interscience Publication, John Wiley&Sons, Inc., New-York – Chichester – Weinheim – Brisbane – Singapore – Toronto, 1997.

[122] K. Arima, On maximum modulus of integral functions, J. Math. Soc. Japan, v. 5, 1952, 62-66.

[123] C. Bandle, Isoperimetric inequalities and applications, Pitman Advanced Publishing, Boston-London-Melbourne, 1980.

[124] R. Bartnik and L. Simon, Spacelike Hypersurfaces with Prescribed Boundary Values and Mean Curvature, Commun. Math. Phys., v. 87, 1982/83, 131-152.

[125] A. Beurling and L. Ahlfors, The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math., v. 96, 1956, 125-142,

[126] L. Bers, Isolated singularities of minimal surfaces, Ann. of Math., v. 53, 1951, 364–386.

[127] L. Bers, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Surveys in Applied Mathematics, III, John Wiley & Sons, Inc., Chapman & Hall, Limited, New York – London, 1958; Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, М.: ИЛ, 1961.

[128] E. Calabi, Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, Proc. Sym. Pure Math., v. 15, 1970, 407-409.

[129] E.D. Callender, Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings, Pacific J. Math., v. 10, 1960, 499-515.

[130] L. Carleson, Removable singularities for continuous harmonic functions in $\mathbf{R}^n$, Math. Scand., 1963, v. 12, 15-18.

[131] J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, Geom. funct. anal., v. 9, 1999, 428-517.

[132] S.Y. Cheng and S.-T. Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric application, Comm. Pure and Appl. Math., v. 28, 1975, 333-354.

[133] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, Maximal spacelike hypersurfaces in Lorentz-Minkowski spaces, Ann. Math., v. 104, 1976, 407-419.

[134] H.I. Choi and A. Treibergs, New examples of harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane to itself, Manuscripta Math., v. 62, 1988, 249-256.

[135] H.I. Choi and A. Treibergs, Gauss map of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of Minkowski Space, J. Diff. Geom., v. 32, 1990, 775-817.

[136] H.I. Choi and A. Treibergs, Hyperbolicity of constant mean curvature surfaces of Minkowski Space, Submitted to the Proceed. of the first Pacific Rim Conference in Geometric Analysis heltd at The Chinese Univ. of Hong Kong. Dec. 16-19. 1992. Intern. Press.

[137] H.I. Choi and A. Treibergs, Constructing Harmonic Maps into the Hyperbolic Space, Proc. of Symp. in Pure Math., v. 54. Part 1., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[138] F.R.K. Chung and S.-T. Yau, A Harnack inequality for homogeneous graphs and subgraphs, Commun. in Analysis and Geometry, v. 2, 1994, 627-640.

[139] F.H. Clarke, On the inverse function theorem, Pac. J. Math., v. 64, No. 1, 1976, 97-102.

[140] P. Collin, R. Krust, Le probléme de Dirichlet pour l'equation des surfaces minimales sur des domaines non bornés, Bull. Soc. Math. France, 1991, v. 119, 443-458.

[141] M. Cristea, Local inversion theorems and implicit function theorems without assuming continuous differentiability, Bull. Math. Soc. Sci. Roumaine, v. 36, n. 3-4, 1992, 227-236.

[142] M. Cristea, Teoria topologică a funcţiilor analitice, Edit. Univer. din Bucureşti, 1999.

[143] C. Croke, Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., 4. Ser., 13, 1980, 419 - 435.

[144] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces, New York, 1950; Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М: ИЛ, 1953.

[145] S.R. Dager, A. Presa Sage,On an analog of the Runge theorem for harmonic differential forms, Zap. Nauchn. Sem S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), 232, 1996, 109–117 (in Russian); English transl., J. Math. Sci., v. 92, n. 1, 1998, 3613–3618.

[146] E. De Giorgi, G. Stampacchia, Sulle singolariá eliminabli delle ipersuperficle minimal, Rend. Accad. Naz. Lincei, v. 38, 1965, 352-357.

[147] G. David, P. Mattila, Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane, Revista Mat. Iberoamericana, v. 16, 2000, 137-215.

[148] L.C. Evans and R.F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC PRESS, Boca Raton–New York–London–Tokio, 1992.

[149] D. Faraco, Beltrami operators and microstructure. Academic dissertation, Depart. of Math. Faculty of Sci. University of Helsinki, Helsinki, 2002.

[150] H. Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der math. Wiss. Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969; Г. Федерер, Геометрическая теория меры, М.: Наука, 1987.

[151] H. Federer and W.H. Fleming, Normal and integral currents, Ann. Math., v. 72, n. 3, 1960, 458–520; Г. Федерер, У.Х. Флеминг, Нормальные и целочисленные потоки, В кн. "Целочисленные потоки и минимальные поверхности", Москва, изд-во "Мир", 1973.

[152] R. Finn, On equations of minimal surface type, Ann. of Math., v. 60. n. 3, 1954, 397–416.

[153] R. Finn, On a problem of type, with applications to elliptic partial differential equations, J. Rational Mech. and Analysis, v. 3, 1954, 789-799.

[154] D. Franke, Quasiregular mappings and Hölder continuity of differential forms on Riemannian manifolds, Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde des Fachbereiches Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin, Berlin, 1999, 1-61.

[155] D. Franke, O. Martio, V.M. Miklyukov, M. Vuorinen and R. Wisk, Quasiregular mappings and $\mathcal{WT}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds, Pacific J. Math., v. 202, n. 1, 2002, 73-92.

[156] B. Fuglede, Extremal length and functional completion, Acta Mathematica, v. 98, 1957, 171-219.

[157] F.W. Gehring, Inequalities for condensers, hyperbolic capacity and extremal lengths, Mich., Math. J., v. 18, n. 1, 1971, 1-20.

[158] S. Granlund, Harnack's inequality in the borderline case, Ann. Acad. Scie. Fenn., S. A.I. Math., v. 5, 1980, 159-163.

[159] S. Granlund, P. Lindqvist and O. Martio, Phragmén–Lindelöf's and Lindelöf's theorem, Ark. Mat., v. 23, 1985, 103-128.

[160] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math., v. 82, n. 2, 1985, 307-347.

[161] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser, 1999.

[162] P. Hajlasz, Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics, Труды по анализу и геометрии, изд-во Института математики, Новосибирск, 2000, 227-254.

[163] Z.-C. Han, L.-F. Tam, A. Treibergs and T. Wan, Harmonic maps from complex plane into surfaces with nonpositive curvature, Comm. in Analysis and Geometry, v. 3, n. 1, 1995, 85-114.

[164] B. Hanson, P. Koskela, and M. Troyanov, Boundary behavior of quasiregular maps and the isodiametric profile, Conform. Geom. Dyn., v. 5, 2001, 81-99.

[165] R. Harvey and J. Polking, Removable singularities of solutions of linear partial differential equations, Acta Math., v. 125, n. 1/2, 1970, 39-56.

[166] P. Hästö, Z. Ibragimov and H. Lindén, Isometries of Relative Metrics, Comp. Methods and Function Theory, v. 6, n. 1, 2006, 15-28.

[167] E. Hebey, Sobolev Spases on Riemannian Manifolds, Lectures notes in mathematics: 1635, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1991.

[168] E. Hebey, Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities, Courant Institute of Math. Sciences, Amer. Math. Soc., Providence Island, 1999.

[169] J. Heinonen, Lectures on Lipschitz Analysis, University of Jyväskylä, Department of Mathematics ans Statistics, Report 100, Jyväskylä, 2005, 1-77.

[170] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford: Clarendon Press. 1993.

[171] W.V.D. Hodge, The theory and applications of harmonic integrals, 2nd ed., Cambridge Univ. Press 1959.

[172] I. Holopainen, Nonlinear potential theory and quasiregular mappings on Riemannian manifolds, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes 74, 1990, 1-45.

[173] I. Holopainen, Rough isometries and p–harmonic function with finite Dirichlet integral, Revista Math. Iberoamericana, v. 10, 1994, 143-176.

[174] I. Holopainen, S. Rickman, Classification of Riemannian manifolds in nonlinear potential theory, Potential Analysis, v. 2, 1993, 37-66.

[175] I. Holopainen and S. Rickman, Failure of the Denjoy theorem for quasiregular maps in dimension $n \geq 3$, Proc. Amer. Math. Soc., v. 124, 1996, 1783-1788.

[176] D. Hoffman, J. Spruck, Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Riemannian Submanifolds, Commun. Pure Appl. Math., v. 27, 1974, 715-727.

[177] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge – London – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney, 1986.

[178] J.F. Hwang, Comparison principles and theorems for prescribed mean curvature equation in unbounded domains, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1988, v. 15, 341-355.

[179] J.F. Hwang, A uniqueness theorem for the minimal surface equation, Pacific J. Math., 1996, v. 176, 357-364.

[180] F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes, Thesis Helsinki, 1914.

[181] T. Iwaniec, Nonlinear differential forms, Lectures in Jyväskylä (International Summer School), August 1998, University of Jyväskylä, Depart. of Math., Report 80, 1998. 207 pp.

[182] T. Iwaniec and G. Martin, Quasiregular mappings in even dimensions, Acta Math., v. 170, 1993, 29-81.

[183] T. Iwaniec and G. Martin, Geometric Function Theory ana Nonlinear Analysis, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2001.

[184] H. Jenkins, On quai-linear elliptic equations which arise from variational problems, J. Math. Mech., v. 10, n. 5, 1961, 705-728.

[185] F. John, On quasi-isometric mappings, I, Comm. Pure Appl. Math., v. 21, 1968, 77-110.

[186] P.W. Jones, Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, Acta Math., v. 147, 1981, 71-86.

[187] R. Kaufman and J.-M. Wu, On removable sets for quasiconformal mappings, Ark. Mat., v. 34, 1996, 141-158.

[188] T. Kilpeläinen, Hölder continuity of solutions to quasilinear elliptic equations involving measures, Potential Analysis, v. 3, n. 3, 1994, 265-272.

[189] T. Kilpeläinen and J. Malý, The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations, Acta Math., v. 172, 1994, 137-161.

[190] T. Kilpeläinen, X. Zhong, Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations, Proc. Amer. Math. Soc., v. 130, n. 6, 2002, 1681-1688.

[191] V.A. Klyachin, Some geometric estimates of the constant in Poincare's inequality on the geodesic spheres in Riemannian manifolds, Reports of the Dep. of Math., Preprint 181, University of Helsinki, 1998, 1-7.

[192] J. Kral, Removable singularities of solutions of semielliptic equations, Rendiconti de Matematica, v. 6, n. 4, 1973, 763-783.

[193] J. Lewis, Picard's theorem and Rickman's theorem by way of Harnack's inequality, Proc. Amer. Math. Soc., v. 122, 1994, 199-206.

[194] R. López, Constant mean curvature graphs in a strip of $\mathbf{R}^2$, Pacific Journ. of Mathematics, v. 206, n. 2, 2002, 359-373.

[195] A.V. Lygin, V.M. Miklyukov, Distortion triangles under quasiisometries. Advances in grid generations, Advances in Grid Generation, Edited by Olga V. Ushakova, To memory of Sergey A. Ivanenko, Ekaterinburg, February 2005, 57-72.

[196] G.R. MacLane, Asymptotic values of holomorphic functions, Rice Univ. Studies, v. 49, 1963, 1-83.

[197] O. Martio, Counterexamples for unique continuation, Manuscripta Math., v. 60, 1988, 21-47.

[198] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, Harnack's inequality for $p-$harmonic functions on Riemannian manifolds for different exhaustion, Комплексный анализ в современной математике. К 80-летию со дня рождения Бориса Владимировича Шабата, 201-230, ред. Е.М. Чирка, Москва, "Фазис", 2001.

[199] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, Morrey's Lemma for Riemannian manifolds, Revue Roumaine Math. Pures Appl., v. XLIII, 1998, 183-210.

[200] O. Martio, V. Miklyukov, M. Vuorinen, Critical points of $A-$solutions of quasilinear elliptic equations, Houston Journal of Mathematics, University of Houston, v. 25, n. 3, 1999, 583-601.

[201] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, Estimates for the energy integral of quasiregular mappings on Riemannian manifolds and isoperimetry, Czechoslovak Mathematical Journal, v. 51 (126), 2001, Praha, 585-608.

[202] O. Martio, V. Miklyukov, S. Ponnusamy, and M. Vuorinen, On Some Properties of Quasiplanes, Results in Mathematics, v. 42, 2002, 107-113.

[203] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, Generalized Wiman and Arima theorems for n-subharmonic functions on cones, The Jounal of Geometric Analysis, v. 13, n. 4, 2003, 605-629.

[204] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, On quasiplanes in $\mathbf{R}^n$ with codimension > 1, Reports in Mathematics, Depart. of Math., Univ. of Helsinki, Preprint 401, Nov. 2004, 12pp.; Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)

[205] O. Martio, V.M. Miklyukov and M. Vuorinen, Wiman and Arima theorems for quasiregular mappings, Reports in Mathematics, Depart. of Math., Univ. of Helsinki, Preprint 412, April 2005, 1-29.

[206] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, Ahlfors theorems for differential forms, Reports in Mathematics, Depart. of Math. and Statist., Univ. of Helsinki, Preprint 455, April 2007, 1-34.

[207] O. Martio, V.M. Miklyukov, M. Vuorinen, Morrey's Lemma on Riemannian manifolds, Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics, v. XLIII, N 1-2, 1998, 183-209.

[208] O. Martio, V.M. Miklyukov and M. Vuorinen, Removable singularities of $\mathcal{WT}$-differential forms and quasiregular mappings, Reports of the Depart. of Math., Univ. of Helsinki, 2004, Preprint 382, 13pp.; Boundary value problems, 2007, doi 10.1155/2007/61602, 9p.

[209] O. Martio, S. Rickman, Ju. Väisälä, Topological and metric properties of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., v. 488, 1971, 1-31.

[210] P. Mattila, Search for geometric criteria for removable sets of bounded analytic functions, in prep.

[211] V.M. Miklyukov, On maps almost quasi-conformally close to quasi-isometries, Journal d'Analyse Mathematique, v. 100, 2006, 375-396.

[212] V. Miklyukov and V. Tkachev, Denjoy - Ahlfors Theorem for Harmonic Functions on Riemannian Manifolds and External Structure of Minimal Surfaces, Commun. Analisys and Geometry, v. 4, n. 4, 1996, 547-587.

[213] V.M. Miklyukov, S.-S. Chow and V.P. Solovjov, Stagnation zones of ideal flows in long and narrow bands, IJMMS, 2004, v. 62, 3339-3356.

[214] J. Milnor, On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic, Amer. Math. Monthly, v. 84, n. 1, 1977, 43-46.

[215] C.B. Morrey, Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Univ. of California Publ., 1943, v. 1, 1-130.

[216] M. Morse, Topological methods in the theory of functions of a complex variable, Princeton, Princeton University Press, 1947; М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного, М.: ИЛ, 1951.

[217] F. Nevanlinna, Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen, Suom. Tied. Toimit., v. 245, 1957, 1-14.

[218] J.C.C. Nitsche, A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates, J. Math. Mech., v. 6, 1957, 859–864.

[219] J.C.C. Nitsche, Über ein verallgemeinertes Dirichletsches Problem für die Minimalflächengleichung und hebbare Unstetigkeiten ihrer Lösungen, Math. Ann., v. 158, 1965, 203-214.

[220] J.C.C. Nitsche, Lectures on Minimal Surfaces, v.1. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1989.

[221] P. Pansu, Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature, Curvature and Topology of Riemannian Manifolds, Proceed. 17th Internat. Taniguchi Symposium held in Katata, Japan, Aug.26-31, 1985, Lecture Notes in Math., 1201, 212–229.

[222] T. Parthasarathy, On Global Univalence Theorems, Lectures Notes in Mathematics, 977, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1983.

[223] E. Phragmén and E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogenènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math., v. 31, 1908, 381-406.

[224] S. Pigola, M. Rigoli and A.G. Setti, Some remarks on the prescribed mean curvature equation on complete manifolds, Pacific J. Math., 2002, v. 206, no. 1, 195-217.

[225] A.V. Pokrovskii, Removable Singularities for p-Harmonic Functions, Междунар. школа-конф. по геометрии и анализу, Тез. докл., Новосибирск: изд-во Института математики СО РАН, 2004, 201-202.

[226] B.H. Pourciau, Analysis and optimization of Lipschitz continuous mappings, J. Optim. Theory Appl., v. 22, n. 3, 1977, 311-351.

[227] B. Pourciau, Global Invertibility of Nonsmooth Mappings, J. Math. Anal. Appl., v. 131, 1988, 170-179.

[228] A. Presa Sage, V.P. Havin, Uniform approximation by harmonic differential forms in Euclidean space. Algebra i Analiz, v. 7, n. 6, 1995, 104–152 (in Russian) ; translation in St. Petersburg Math. J., v. 7, n. 6, 1996, 943–977.

[229] S. Rickman, Quasiregular mappings, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Bd. 26, Berlin, 1993.

[230] S. Rickman and M. Vuorinen, On the order of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., v. 7, 1982, 221-231.

[231] I.M. Reshetnikova, V.G. Tkachev, On the Gauss map of embedded minimal tubes, Note di Matematica, v. 19, n. 1, 1999, 7-17.

[232] L. Simon, A Hölder estimate for quasiconformal maps between surfaces in Euclidean space, Acta Math., v. 139, 1977, 19-51.

[233] L. Simon, Equations of mean curvature type in 2 independent variables, Pac. J. Math., v. 69, 1977, 245-268.

[234] J. Serrin, Local behavior of solutions of quasi-linear equations, Acta Math., v. 111, 1964, 247-302.

[235] O. Teichmüller, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutsche math., v. 3, 1938, 621-678.

[236] V.G. Tkachev, External geometry of p-minimal surfaces, Geometry from the Pacific Rim, Eds.: Berrick/Loo/Wang, Walter de Gruyter&Co., Berlin - New York, 1997, 363 - 375.

[237] A. Treibergs, Entire Spacelike Hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowsky Space, Invent. Math., v. 66., 1982, 39-56.

[238] D.C. Ullrich, Removable sets for harmonic functions, Mich. Math. J., v. 38, 1991, 467-473.

[239] N.X. Uy, Removable set for Lipschitz harmonic functions, Mich. Math. J., v. 37, 1990, 45-51.

[240] J. Väisälä, Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Mathematics, 229, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

[241] S.K. Vodop'yanov, $\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot Groups in Different Topologies and Related Topics, Труды по анализу и геометрии, изд-во Института математики, Новосибирск, 2000, 603-670.

[242] M. Vuorinen, On the Harnack constant and the boundary behavior of Harnack functions, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math., 7, 1982, 259-272.

[243] M. Vuorinen, Conformal Geometry and Quasiregular Mappings, Lecture Notes in Math., 1319, Springer – Verlag, 1988.

[244] I.V. Zhuravlev, A.Yu. Igumnov, and V.M. Miklyukov, An implicit function theorem, Reports of the Depart. of Math., Preprint 346, February 2003, Univ. of Helsinki, 1-8 (submitted to The Rocky Mountain J. of Mathematics).

[245] J. Warga, Fat homeomorphisms and unbounded derivate containers, J. Math. Anal. Appl., v. 81, 1981, 545-560.

[246] F. Warner, Differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[247] A. Wiman, Sur une extension d'une theorems de M. Hadamard, Ark. för Math. Astr. Fys., v. 2, n. 14, 1905, 1-5.

[248] S.-T. Yau, Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., v. 8, n. 4, 1975, 487-507.

[249] S.-T. Yau, Survey of partial differential equations in differential geometry, Seminar on Diff. Geom. (1979/80; S.T. Yau, edit), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. and Univ. of Tokyo, 1982, 3-71.

[250] S.-T. Yau, On the Harnack inequalities of partial differential equations, Commun. in Analysis and Geometry, v. 2, 1994, 431-450.

Авторский и предметный указатель

Научное издание

В.М. Миклюков

Геометрический анализ

Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения

Печатается в авторской редакции с готового оригинал-макета.

Главный редактор А.В. Шестакова
Оформление обложки Н.Н. Захаровой

Подписано в печать 12.01 2007 г. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 10,7.
Уч.-изд. л. 20.5. Тираж 100 экз. Заказ 132.

Издательство Волгоградского государственного университета,
400062, г. Волгоград, просп. Университетский, 100.